A Matemática do Ensino Médio

Volume 2

Elon Lages Lima
Paulo Cezar Pinto Carvalho
Eduardo Wagner
Augusto César Morgado



COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

A Matemática do Ensino Médio Volume 2

Elon Lages Lima
Paulo Cezar Pinto Carvalho
Eduardo Wagner
Augusto Cesar Morgado

Quinta Edição

Coleção do Professor de Matemática



Estrada Dona Castorina, 110 - Horto
22460-320, Rio de Janeiro - RJ

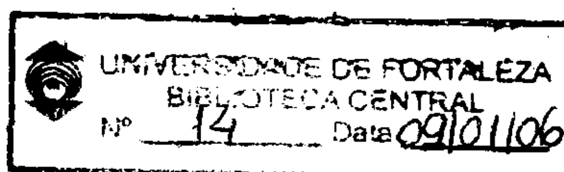
Impresso no Brasil / Printed in Brazil

Coleção do Professor de Matemática

Capa: Rodolfo Capeto

Distribuição e vendas:
Sociedade Brasileira de Matemática
e-mail: vendalivros@sbm.org.br
Tel.: (21) 2529-5073
www.sbm.org.br

ISBN: 85-85818-11-5



Prefácio

O programa de Matemática da segunda série do Ensino Médio tem dois temas centrais: o estudo de Matemática Discreta e a introdução à Geometria Espacial. É comum e natural que o aluno sinta dificuldades iniciais em ambos os temas. Alguns tópicos de Matemática Discreta - Análise Combinatória, por exemplo - utilizam técnicas bem diferentes daquelas a que o aluno está acostumado. Nesses tópicos, o aluno precisa colocar em jogo seu raciocínio crítico e criativo com muito mais freqüência do que nas séries anteriores. Por outro lado, a Geometria Espacial envolve um esforço de imaginação bastante superior ao da Geometria Plana, principalmente devido às limitações causadas pela representação bi-dimensional das figuras.

Para ajudar os alunos a superar estas dificuldades, é fundamental que os professores tenham um bom domínio do material a ser coberto. Não é suficiente que o professor simplesmente saiba resolver os problemas comumente apresentados nos livros-texto. Sem uma orientação adequada, corre-se o risco de transmitir para os alunos a idéia de que esses assuntos requerem o uso de um enorme manancial de truques, reforçando a idéia de que Matemática é um assunto difícil e exclusivo de uns poucos.

Este livro, escrito para professores do Ensino Médio e estudantes de licenciatura em Matemática, visa fornecer ao professor subsídios para evitar que isso ocorra. Este volume é o segundo de uma trilogia abordando os temas mais importantes relativos a cada uma das séries do Ensino Médio e vêm se juntar aos demais livros da Coleção do Professor de Matemática, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática, com apoio do IMPA. Este livro foi usado pela primeira vez, em janeiro de 1997, no segundo módulo do curso para aperfeiçoamento de professores, realizado no IMPA e tendo como instrutores o Prof. Elon Lages Lima e os autores. Gostaríamos de registrar e agradecer a valiosa contribuição do Prof. Elon no conteúdo final do material aqui apresentado, através de críticas e sugestões sempre bem fundadas.

O livro tem duas partes bem distintas. A primeira parte, escrita por Augusto César Morgado, é dedicada à Matemática Discreta, contendo o estudo de Progressões (com aplicações à Matemática Financeira), Análise Combinatória e Probabilidade.

Uma preocupação sempre presente é a de evitar o uso excessivo de fórmulas. Na maior parte dos casos, elas são desnecessárias e substituídas, com vantagem, pelo uso consciente das definições e dos princípios fundamentais. Por exemplo, os professores são aconselhados a ensinar os alunos a fazer uso inteligente do princípio da multiplicação em Análise

Combinatória, ao invés de recorrer a uma profusão de fórmulas, cujo uso é muitas vezes confuso para o aluno (``professor, aqui eu uso arranjos ou combinações?'').

A segunda parte do livro, escrita por Paulo Cezar Pinto Carvalho e Eduardo Wagner, é dedicada à Geometria Espacial e tem duas preocupações fundamentais. A primeira é oferecer uma boa fundamentação do assunto para o professor, discutindo diversas formas de levar esses fundamentos para os alunos. A segunda é procurar oferecer, em cada tópico, sugestões de atividades em sala de aula que visam a tornar o assunto mais interessante para o aluno e facilitar o desenvolvimento de sua visão e intuição espaciais. Para tal, sempre que possível, são apresentados exemplos de objetos do mundo real que ilustrem conceitos importantes.

O leitor poderá estranhar a não inclusão, neste volume de matrizes e sistemas de equações lineares, assuntos muitas vezes estudados na segunda série do Ensino Médio. Esse estudo, no entanto, é geralmente feito de forma puramente algébrica, ignorando os aspectos geométricos, fundamentais para um entendimento adequado do assunto. Nesta coleção, esse assunto faz parte do 3° volume, juntamente com Geometria Analítica, e é abordado de um ponto de vista bem mais geométrico do que o normalmente encontrado nos livros-texto.

A publicação deste livro contou com o apoio da FAPERJ, em convênio com a CAPES, com o valioso apoio do IMPA e com a perícia e paciência de Wilson Góes.

Rio de Janeiro, Janeiro de 1998

Augusto César Morgado
Eduardo Wagner
Paulo Cezar Pinto Carvalho

Conteúdo

Capítulo 1

Progressões

1.1 Progressões Aritméticas

São comuns, na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais.

Exemplo 1. Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?

Solução. Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são $400, 430, 460, 490, 520, 550, \ldots$. Em junho, a fábrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta de $5 \times 30 = 150$ veículos. Em junho, a fábrica produziu $400 + 150 = 550$ veículos. □

Progressões aritméticas são seqüências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo.

A seqüência $(400, 430, 460, 490, 520, 550, \ldots)$ é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão. A razão dessa progressão é igual a 30.

Portanto, uma *progressão aritmética* é uma seqüência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de *razão* da progressão e representada pela letra r. □

Exemplo 2. As seqüências (5, 8, 11,...) e (7, 5, 3, 1,...) são progressões aritméticas cujas razões valem respectivamente 3 e −2. □

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, para avançar um termo basta somar a razão; para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $a_{13} = a_5 + 8r$, pois, ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos; $a_{12} = a_7 + 5r$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = a_{17} - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral, $a_n = a_1 + (n-1)r$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n - 1$ termos. □

Exemplo 3. Em uma progressão aritmética, o quinto termo vale 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Solução. $a_{20} = a_5 + 15r$, pois ao passar do quinto termo para o vigésimo, avançamos 15 termos. Logo, $50 = 30 + 15r$ e $r = \frac{4}{3}\cdot$ Analogamente, $a_8 = a_5 + 3r = 30 + 3.\ \frac{4}{3} = 34$. O oitavo termo vale 34. □

Exemplo 4. Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?

Solução. Temos $a_1 = 3$ e $a_{12} = 25$. Como $a_{12} = a_1 + 11r$, temos $25 = 3 + 11r$. Daí, $r = 2$. □

Exemplo 5. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

Solução. Os anos de passagem do cometa foram 1986, 1910, 1834,... e formam uma progressão aritmética de razão −76. O termo de ordem n dessa progressão é $a_n = a_1 + (n-1)r$, isto é, $a_n = 1986 - 76(n-1) = 2062 - 76n$. Temos $a_n > 0$ quando $n <$

$\frac{2062}{76} = 27,13\ldots$. Portanto, os termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{27}$. Logo, ele nos visitou 27 vezes na era cristã e sua primeira passagem na era cristã foi no ano $a_{27} = 2062 - 76 \times 27 = 10$.

Poderíamos também ter resolvido o problema aproveitando o fato dos termos dessa progressão serem inteiros.

Em uma progressão aritmética de termos inteiros e razão não-nula, todos os termos dão o mesmo resto quando divididos pelo módulo da razão. Como 1986 dividido por 76 dá resto 10, todos os anos em que o cometa por aqui passou dão resto 10 quando divididos por 76. A primeira visita ocorreu entre os anos 1 e 76, inclusive. Entre esses anos, o único que dividido por 76 dá resto 10 é o ano 10. Para descobrir a ordem desse termo, usamos $a_n = a_1 + (n-1)r$, isto é, $10 = 1986 - 76(n-1)$. Daí,

$$n = \frac{2052}{76} = 27. \qquad \square$$

Muitas vezes é conveniente enumerar os termos de uma progressão aritmética a partir de zero, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 6. O preço de um carro novo é de R$ 15 000,00 e diminui de R$ 1 000,00 a cada ano de uso. Qual será o preço com 4 anos de uso?

Solução. Chamando o preço com n anos de uso de a_n, temos $a_0 = 15\,000$ e queremos calcular a_4. Como a desvalorização anual é constante, (a_n) é uma progressão aritmética. Logo, $a_4 = a_0 + 4r = 15\,000 + 4 \times (-1\,000) = 11\,000$. O preço será de R$ 11 000,00. $\square$

Exemplo 7. Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão aritmética crescente. Mostre que a razão dessa progressão é igual ao raio do círculo inscrito.

Solução. Chamemos os lados do triângulo de $x - r$, x, $x + r$. Esse é um bom truque para facilitar as contas; ao representar uma

progressão aritmética com um número ímpar de termos, começar pelo termo central.

Como a progressão é crescente, a hipotenusa é o último termo. Pelo Teorema de Pitágoras, $(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$. Daí, $x^2 = 4rx$ e, já que $x \neq 0$ pois x é um dos catetos, $x = 4r$. Os lados são então $3r$, $4r$ e $5r$. O perímetro é $2p = 3r + 45 + 5r = 12r$ e a área é $S = \frac{3r \cdot 4r}{2} = 6r^2$. O raio do círculo inscrito é $\frac{S}{p} = \frac{6r^2}{6r} = r$. □

Exemplo 8. Determine 4 números em progressão aritmética crescente, conhecendo sua soma 8 e a soma de seus quadrados 36.

Solução. Um bom truque, para representar progressões aritméticas com um número par de termos, é chamar os dois termos centrais de $x - y$ e $x + y$. Isso faz com que a razão seja $(x + y) - (x - y) = 2y$.

A progressão então será $x - 3y$, $x - y$, $x + y$, $x + 3y$.
Temos

$$\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 8 \\ (x - 3y)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + (x + 3y)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = 8 \\ 4x^2 + 20y^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Como a progressão é crescente, $y > 0$. Logo, $x = 2$ e $y = 1$.
Os números são -1, 1, 3, 5. □

Exemplo 9. Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, $a_n = a_1 + (n - 1)r = r \cdot n + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1.
Por esse motivo, as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem.

Reciprocamente, se em uma seqüência o termo de ordem n for dado por um polinômio em n, de grau menor que ou igual a 1, ela será uma progressão aritmética. Com efeito, se $x_n = an + b$, (x_n) é a progressão aritmética na qual $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a + b$. □

Exemplo 10. Como em uma progressão aritmética $a_n = a_0 + nr$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função afim $a(x) = a(0) + rx$.

Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma seqüência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, etc... estão em linha reta.

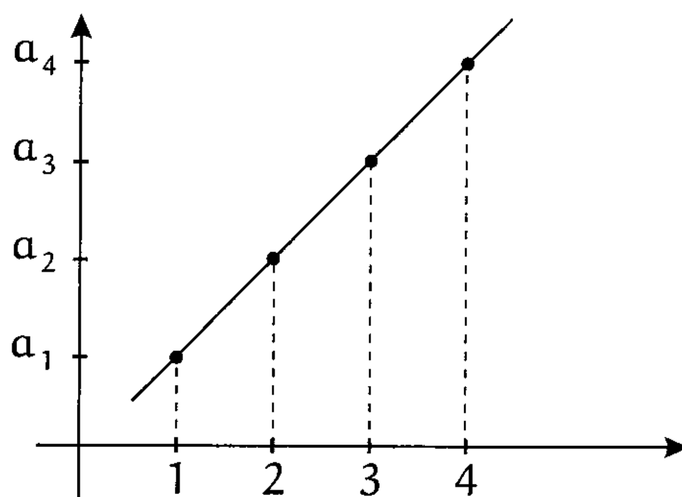


Figura 1.1 □

Quando o grande matemático alemão Carl F. Gauss (1777–1855) tinha sete anos de idade, seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 até 100. O professor ficou surpreso quando, depois de poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5 050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somara primeiramente $1 + 100$,

$2+99$, $3+98$,.... Assim obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era $50 \times 101 = 5\,050$.

Baseados nessa idéia, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética

A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)$$

é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Prova. Temos $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para a frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_2 + a_1$. Daí,

$$2S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \quad \text{e} \quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \qquad \square$$

Exemplo 11. Qual é o valor da soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética 2, 6, 10, ...?

Solução. $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \times 4 = 78$

$$S_{20} = \frac{(2 + 78)20}{2} = 800. \qquad \square$$

Exemplo 12. A soma dos n primeiros números inteiros e positivos

é

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Observe que S_n é um polinômio do segundo grau em n, sem termo independente. □

Exemplo 13. A soma dos n primeiros números ímpares é

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2.$$

Observe que S_n é um polinômio do segundo grau em n, sem termo independente. □

Exemplo 14. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n.$$

Observe que, se $r \neq 0$, S_n é um polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente. Se $r = 0$, S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Reciprocamente, todo polinômio do segundo grau em n, desprovido de termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de alguma progreessão aritmética. Com efeito $P(n) = an^2 + bn$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética na qual $\frac{r}{2} = a$ e $a_1 - \frac{r}{2} = b$, ou seja, $r = 2a$ e $a_1 = a + b$. □

Define-se para seqüências o *operador* Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Uma seqüência (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n)$ é constante.

Uma *progressão aritmética de segunda ordem* é uma seqüência (a_n) na qual as diferenças $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética não-estacionária.

Exemplo 15. A seqüência $(a_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a seqüência das diferenças entre cada termo e o termo anterior, $(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ é uma progressão aritmética não-estacionária. □

De modo geral, uma *progressão aritmética de ordem* k $(k > 2)$ é uma seqüência na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k - 1$.

Exemplo 16. A tabela abaixo mostra uma seqüência $(a_n) = (n^3 - n)$ e suas diferenças (Δa_n), $(\Delta^2 a_n) = (\Delta\Delta a_n)$, $(\Delta^3 a_n) = (\Delta\Delta^2 a_n)$ etc...

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$
0	0	0	6	6
1	0	6	12	6
2	6	18	18	6
3	24	36	24	6
4	60	60	30	□
5	120	90	□	
6	210	□		
7	□			

Se $(\Delta^3 a_n)$, como parece, for constante, $(\Delta^2 a_n)$ será uma progressão aritmética, (Δa_n) será uma progressão aritmética de segunda ordem e (a_n) será uma progressão aritmética de terceira ordem. Isso é verdade, pois

$$
\begin{aligned}
a_n &= n^3 - n, \\
\Delta a_n &= a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - (n+1) - [n^3 - n] = 3n^2 + 3n, \\
\Delta^2 a_n &= 3(n+1)^2 + 3(n+1) - [3n^2 + 3n] = 6n + 6, \\
\Delta^3 a_n &= 6(n+1) + 6 - [6n + 6] = 6
\end{aligned}
$$

e $\Delta^3 a_n$ realmente é constante.

Observe que, nesse quadro, a soma de dois elementos lado a lado é igual ao elemento que está embaixo do primeiro desses

elementos. Isso nos permite calcular os elementos que estão assinalados por □. Da direita para a esquerda, eles são iguais a 6, $30+6=36$, $90+36=126$ e $210+126=336$. Portanto, $a_7=336$ e este foi o processo mais exótico que você já viu para calcular $a_7=7^3-7$. □

Exemplo 17. Toda seqüência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, do segundo grau, é uma progressão aritmética de segunda ordem e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem então (a_n) é um polinômio do segundo grau em n.

Com efeito, se $a_n = an^2+bn+c$, com $a \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}\Delta a_n = a_{n+1}-a_n &= a(n+1)^2+b(n+1)+c-(an^2+bn+c)\\ &= 2an+(a+b),\end{aligned}$$

que é do primeiro grau em n. De acordo com o exemplo 9, (Δa_n) é uma progressão aritmética não-estacionária.

Por outro lado, se (a_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, $b_n=\Delta a_n = a_{n+1}-a_n$ é uma progressão aritmética com razão diferente de zero e $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-2}+b_{n-1} = (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n) = a_{n+1}-a_1$ é um polinômio do segundo grau em n. Em conseqüência, a_n também é um polinômio do segundo grau em n. □

Exemplo 18. A soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros e positivos é

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n} k^2$$

e pode ser calculada do modo a seguir:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1.$$

Os dois primeiros somatórios têm várias parcelas comuns, pois

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Simplificando as parcelas comuns aos dois membros, obtemos

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

temos

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Observe que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ é um polinômio do terceiro grau em n. □

Exemplo 19. Sabendo que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

é um polinômio do terceiro grau em n, poderíamos ter determinado o valor de $p(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ pondo $p(n) = an^3 + bn^2 +$

$cn + d$. Temos $p(1) = 1^2$, $p(2) = 1^2 + 2^2$, $p(3) = 1^2 + 2^2 + 3^2$ e $p(4) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. Obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$. Então

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \square$$

Os teoremas a seguir generalizam os últimos exemplos.

Teorema 1 . $1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$ é um polinômio de grau $p + 1$ em n.

Prova. Vamos proceder por indução sobre p. Para $p = 1$, o teorema já foi provado no exemplo 12.

Suponhamos agora que $\sum_{k=1}^{n} k^p$ seja um polinômio de grau $p + 1$ em n, para todo $p \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p = s + 1$, isto é, mostraremos que $\sum_{k=1}^{n} k^{s+1}$ é um polinômio de grau $s + 2$ em n.

Observe que $(k+1)^{s+2} = k^{s+2} + (s+2)k^{s+1} + \ldots$, onde os termos que não foram escritos explicitamente formam um polinômio de grau s em k. Temos então,

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{s+2} = \sum_{k=1}^{n} k^{s+2} + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n),$$

onde $F(n)$ é um polinômio de grau $s + 1$ em n, pela hipótese da indução.

Simplificando os termos comuns aos dois primeiros somatórios, obtemos

$$(n+1)^{s+2} = 1 + (s+2)\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} + F(n).$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{s+1} = \frac{(n+1)^{s+2} - 1 - F(n)}{s+2},$$

que é um polinômio de grau $s+2$ em n, c.q.d. □

Corolário . Se F é um polinômio de grau p então $\sum_{k=1}^{n} F(k)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n.

Exemplo 20. Vamos calcular $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2)$. Pelo corolário, sabemos que o valor dessa soma é um polinômio do terceiro grau em n. Então $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Atribuindo a n os valores 1, 2, 3 e 4 obtemos as equações

$$\begin{cases} a+b+c+d=3 \\ 8a+4b+2c+d=11 \\ 27a+9b+3c+d=26 \\ 64a+16b+4c+d=50 \end{cases}$$

Resolvendo, encontramos $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{6}$, $d = 0$. Então,

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n = \frac{2n^3 + 9n^2 + 7n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$ □

Teorema 2 . (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p $(p \geqslant 2)$, se e somente se a_n é um polinômio de grau p em n.

Prova. Vamos proceder por indução sobre p. Para $p = 2$ o teorema foi provado no exemplo 17.

Suponhamos agora que o teorema seja verdadeiro para todo $p \in \{2, 3, \ldots, s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira

para $p = s + 1$. Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem s e, pela hipótese da indução, b_n é um polinômio de grau s em n. Então, $\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$ é, pelo corolário do teorema 1, um polinômio de grau $s + 1$ em n. Daí, a_{n+1} e, em conseqüência, a_n são polinômios de grau $s + 1$ em n.

Se a_n é um polinômio de grau $s + 1$ em n, Δa_n é um polinômio de grau s em n, conforme você facilmente verificará. Pela hipótese da indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem s, ou seja, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$. □

O exemplo a seguir é conhecido como teorema fundamental da somação e fornece uma técnica bastante eficiente para o cálculo de somas.

Exemplo 21. Mostre que $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$.

Solução. $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \cdots + \Delta a_{n-1} + \Delta a_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$. □

Exemplo 22. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.

Solução. Determinaremos a_k tal que $\Delta a_k = k(k+1) = k^2 + k$, isto é, determinaremos $a_k = \Delta^{-1}(k^2 + k)$.

Como (Δa_k) é uma progressão aritmética de segunda ordem, (a_k) é uma progressão aritmética de terceira ordem. Logo, a_k é um polinômio do terceiro grau. Se

$$a_k = ak^3 + bk^2 + ck + d,$$

$$\begin{aligned}\Delta a_k &= a_{k+1} - a_k \\ &= a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + d - [ak^3 + bk^2 + ck + d] \\ &= 3ak^2 + (3a + 2b)k + (a + b + c) = k^2 + k.\end{aligned}$$

Devemos ter $3a = 1, 3a + 2b = 1, a + b + c = 0$. Daí, $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{3}$ e d é arbitrário. Logo, $a_k = \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{3}k + d$.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$$

$$= \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} + d - d = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad \square$$

Exercícios

Proceda como se não soubesse que há sugestões no final dos enunciados e respostas no fim do livro.

1. Formam-se n triângulos com palitos, conforme a figura.

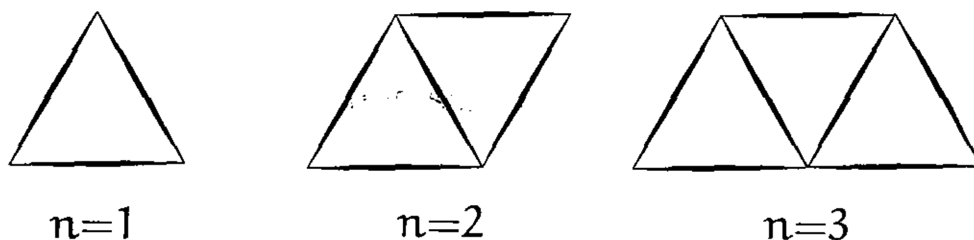


Figura 1.2

Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?

2. Os ângulos internos de um pentágono convexo estão em progressão aritmética. Determine o ângulo mediano.

3. Se $3 - x, -x, \sqrt{9 - x}, \ldots$ é uma progressão aritmética, determine x e calcule o quinto termo.

4. Calcule a soma dos termos da progressão aritmética 2, 5, 8, 11,... desde o 25º até o 41º termo, inclusive.

5. Calcule a soma de todos os inteiros que divididos por 11 dão resto 7 e estão compreendidos entre 200 e 400.

6. Quantos são os inteiros, compreendidos entre 100 e 500, que não são divisíveis nem por 2, nem por 3 e nem por 5? Quanto vale a soma desses inteiros?

7. Quanto vale o produto $(a)(aq)(aq^2)(aq^3)\dots(aq^{n-1})$?

8. Determine o maior valor que pode ter a razão de uma progressão aritmética que admita os números 32, 227 e 942 como termos da progressão.

9. De quantos modos o número 100 pode ser representado como uma soma de dois ou mais inteiros consecutivos? E como soma de dois ou mais naturais consecutivos?

10. Um quadrado mágico de ordem n é uma matriz $n \times n$, cujos elementos são os inteiros $1, 2, \dots, n^2$, sem repetir nenhum, tal que todas as linhas e todas as colunas têm a mesma soma. O valor dessa soma é chamado de constante mágica. Por exemplo, os quadrados

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

são mágicos, com constantes mágicas respectivamente iguais a 15, 15 e 65. Aliás, os dois últimos são hipermágicos, pois as linhas, colunas e também as diagonais têm a mesma soma. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico de ordem n.

11. Os inteiros de 1 a 1000 são escritos ordenadamente em torno de um círculo. Partindo de 1, riscamos os números de 15 em 15, isto é, riscamos 1, 16, 31,... O processo continua até se atingir um número já previamente riscado. Quantos números sobram sem riscos?

12. Podem os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ pertencer a uma mesma progressão aritmética?

13. Suprimindo um dos elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, a média aritmética dos elementos restantes é 16,1. Determine o valor de n e qual foi o elemento suprimido.

14. Um bem, cujo valor hoje é de R$ 8 000,00, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de R$ 2 000,00. Supondo constante a desvalorização anual, qual será o valor do bem daqui a 3 anos?

15. Um bem, cujo valor hoje é de R$ 8 000,00, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de R$ 2 000,00. Supondo que o valor do bem cai segundo uma linha reta, determine o valor do bem daqui a 3 anos.

16. Calcule a soma de todas as frações irredutíveis, da forma $\frac{p}{72}$, que pertençam ao intervalo $[4,7]$.

17. Qual a maior potência de 7 que divide $1000!$?

18. Em quantos zeros termina o número resultante do cálculo de $1000!$?

19. Calcule o valor das somas dos n primeiros termos das seqüências:

a) $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$

b) $1 \cdot 4, 3 \cdot 7, 5 \cdot 10, 7 \cdot 13, \ldots$

20. Representando por $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira do real x, isto é, o maior número inteiro que é menor que ou igual a x e por $\{x\}$ o inteiro mais próximo do real x, determine:

a) $\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{n^2-1}\rfloor$

b) $\lfloor\sqrt[3]{2}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{2}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{3}\rfloor + \lfloor\sqrt[3]{n^3-1}\rfloor$

c) $\dfrac{1}{\{\sqrt{1}\}} + \dfrac{1}{\{\sqrt{2}\}} + \dfrac{1}{\{\sqrt{3}\}} + \cdots + \dfrac{1}{\{\sqrt{1000}\}}$

d) $\{\sqrt{1}\} + \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + \cdots + \{\sqrt{1000}\}$.

21. Prove que a soma de todos os inteiros positivos de n dígitos, $n > 2$, é igual ao número $494\underline{99\ldots9}55\underline{00\ldots0}$, no qual há $n-3$ dígitos sublinhados que são iguais a 9 e $n-2$ dígitos sublinhados que são iguais a 0.

22. Determine o primeiro termo e a razão da progressão aritmética na qual a soma dos n primeiros termos é, para todo n: a)

$S_n = 2n^2 + n$ b) $S_n = n^2 + n + 1$.

23. Determine no quadro abaixo:

1				
3	5			
7	9	11		
13	15	17	19	
21	23	25	27	29

....

a) o primeiro elemento da 31ª linha.
b) a soma dos elementos da 31ª linha.

24. Considere um jogo entre duas pessoas com as seguintes regras:

i) Na primeira jogada, o primeiro jogador escolhe um número no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e diz esse número.
ii) As pessoas jogam alternadamente.
iii) Cada pessoa ao jogar escolhe um elemento de A, soma-o ao número dito pela pessoa anterior e diz a soma.
iv) Ganha quem disser 63.

Qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora e qual é essa estratégia?

25. Refaça o exercício anterior para o caso do vencedor ser quem disser 64.

26. Refaça o exercício 24) para o conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$.

27. Mostre que no exercício 24), se o conjunto fosse $A = \{3, 5, 6, 7\}$, o segundo jogador tem uma estratégia que impede o primeiro jogador de ganhar.

28. Na primeira fase do campeonato brasileiro de futebol, que é disputado por 24 clubes, quaisquer dois times jogam entre si uma única vez. Quantos jogos há?

29. Uma bobina de papel tem raio interno 5cm, raio externo 10cm e a espessura do papel é 0,01cm. Qual é o comprimento da

bobina desenrolada?

30. Dividem-se os números naturais em blocos do modo seguinte: (1), (2.3) (4,5,6) (7,8,9,10)(11.12.13.15).... Em seguida suprimem-se os blocos que contêm um número par de elementos, formando-se o quadro:

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 4 & 5 & 6 & & \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

Determine:

a) o primeiro elemento da linha k.
b) o elemento central da linha k.
c) a soma dos elementos da linha k.
d) a soma dos elementos das k primeiras linhas.

31. Qual é o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano?

32. Prove: se a_n é um polinômio de grau p então Δa_n é um polinômio de grau $p - 1$.

33. Prove o corolário do teorema 1.

34. Quantos são os termos comuns às progressões aritméticas $(2, 5, 8, 11, \ldots, 332)$ e $(7, 12, 17, 22, \ldots, 157)$?

35. Há dois tipos de anos bissextos: os que são múltiplos de 4 mas não de 100 e os que são múltiplos de 400.

a) Quantos são os anos bissextos entre 1997 e 2401?
b) Se 1º de janeiro de 1997 foi quarta-feira, que dia será 1º de janeiro de 2500?
c) Qual o primeiro ano, a partir de 1997, no qual o 1º de janeiro será também quarta-feira?
d) Escolhido um ano ao acaso, qual a probabilidade dele ser bissexto?

36. Benjamim começou a colecionar calendários em 1979. Hoje, sua coleção já tem algumas duplicatas – por exemplo, o calendário de 1985 é igual ao de 1991 – mas ainda não está completa.

a) Em que ano Benjamim completará sua coleção?

b) Quando a coleção estiver completa, quantos calendários diferentes nela haverá?

37. A razão entre as somas dos n primeiros termos de duas progressões aritméticas é $\frac{2n+3}{4n-1}$, para todo valor de n. Quanto vale a razão entre seus termos de ordem n?

38. O número triangular T_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \ldots$. O número quadrangular Q_n é definido como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $1, 3, 5, 7, \ldots$. Analogamente são definidos números pentagonais, hexagonais, etc.. A figura abaixo justifica essa denominação.

Determine o número j-gonal de ordem n.

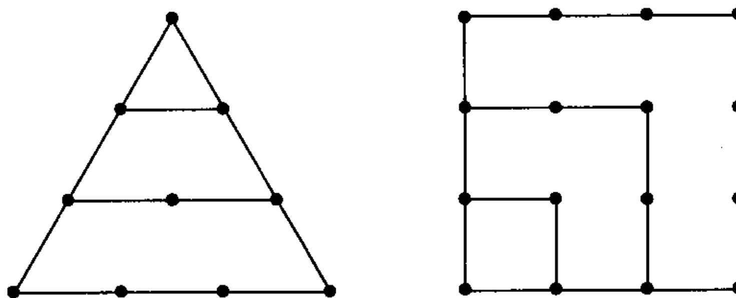


Figura 1.3

39. Mostre que se $\Delta a_k = \Delta b_k$ então $a_k - b_k$ é constante.

40. Se $a \neq 1$, determine Δa^k.

41. Se $a \neq 1$, determine $\Delta^{-1} a^k$.

42. Use o teorema fundamental da somação para calcular:

a) $\sum_{k=1}^{n} 3^k$.

b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$.

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Sugestões aos Exercícios

1. O aumento de um triângulo causa o aumento de 2 palitos. O número de palitos constitui uma progressão aritmética de razão 2.

2. A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo é 540°.

3. $-x-(3-x)=\sqrt{9-x}-(-x)$.

4. Do inteiro a (inclusive) ao inteiro b (inclusive), há $b-a+1$ inteiros.

6a. Faça um diagrama para os conjuntos $X = \{x \in Z : 100 \leqslant x \leqslant 500\}$, $A = \{x \in X : x$ é divisível por 2$\}$, $B = \{x \in X : x$ é divisível por 3$\}$ e $C = \{x \in X : x$ é divisível por 5$\}$. Queremos determinar o número de elementos do complementar de $A \cup B \cup C$ em relação ao universo X.

8. Se para passar do 32 para o 227 e para o 942 avançamos respectivamente p e q termos, temos $227 = 32 + pr$ e $942 = 32 + qr$. Daí, $\frac{p}{q} = \frac{195}{910}$. Como p e q são inteiros positivos, é fácil descobrir todos os valores possíveis para p e q; basta descobrir todas as frações que são iguais a $\frac{195}{910}$.

9. Se $100 = (a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n)$, com $n>1$, $100 = \frac{(2a+n+1)n}{2}$. Daí se conclui que $(2a+n+1)n = 200$ e tanto n quanto $2a+n+1$ devem ser divisores de 200. Para evitar muitas contas, note também que sempre um dos números n e $2a+n+1$ é ímpar.

10. Calcule a soma de todos os elementos da matriz.

11. Uma solução muito bonita pode ser obtida pensando nos pontos riscados como vértices de um polígono. Uma solução "normal" pode ser obtida observando que o último número riscado na primeira volta é 991, o primeiro riscado na segunda volta é 6, etc...

12. Proceda como no problema 8.

13. $\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1} \leqslant 16,\ 1 \leqslant \frac{2+3+\cdots+n}{n-1}$.

15. Esse problema é igual ao anterior.

16. Faça a soma de todas as frações e subtraia a soma das redutíveis, que são as que têm numeradores múltiplos de 2 ou 3. Um diagrama de conjuntos ajuda.

17. Você pode substituir $1000! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 1000$ por $7 \times 14 \times 21 \times \cdots \times 994 = 7^{142}(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 142)$.

18. Você deve determinar a maior potência de 10 que divide 1000! Para isso basta determinar a maior potência de 5 que divide 1000!

19a. Parta de $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ e proceda como no exemplo 18.

19b. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(3k+1) = \sum_{k=1}^{n} (6k^2 - k - 1)$.

20. $\lfloor x \rfloor = k$, $k \geqslant 0$, se e somente se $k \leqslant x < k+1$. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = k$, $k \geqslant 0$, se e somente se $k^2 \leqslant x < k^2 + 2k + 1$. Há portanto $2k+1$ inteiros positivos x para os quais $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = k$. A soma pedida é $\sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)k$.

20c. se x é inteiro positivo, $\{\sqrt{x}\} = k$, $k \geqslant 0$, se e somente se $k - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < k + \frac{1}{2}$, ou seja, $k^2 - k + \frac{1}{4} < x < k^2 + k + \frac{1}{4}$, ou ainda, $k^2 - k + 1 \leqslant x \leqslant k^2 + k$. Há $2k$ inteiros positivos x tais que $\{\sqrt{x}\} = k$.

21. A soma pedida é a soma de uma progressão aritmética de razão 1, com primeiro termo igual a 10^{n-1} e último termo igual a $10^n - 1$.

23. O primeiro elemento da 31ª linha é precedido por $1 + 2 + \cdots + 30$ termos.

24. Para ter certeza de alcançar 63, você deve antes alcançar 55.

27. Em algum momento o segundo jogador receberá uma soma maior que ou igual a 49.

28. O Botafogo joga 23 partidas; o primeiro dos times restantes joga 22 partidas que ainda não foram contadas, etc...

29. Considere a bobina formada por círculos cujos raios formam uma progressão aritmética cuja razão é a espessura do papel.

30a. Trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem.

30b. Trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem.

30c. Trata-se de uma progressão aritmética de terceira ordem.

30d. Trata-se de uma progressão aritmética de quarta ordem.

31. Trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem.

32. Basta mostrar que a_n e a_{n+1} são polinômios de grau p cujos termos de maior grau são idênticos e cujos termos de grau $p-1$ são diferentes.

33. Se $F(k) = a_p k^p + a_{p-1}k^{p-1} + \cdots + a_1 k + a_0$ então $\sum_{k=1}^{n} F(k) = a_p \sum_{k=1}^{n} k^p + a_{p-1} \sum_{k=1}^{n} k^{p-1} + +a_1 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} a_0$.

34. Os termos da primeira progressão são da forma $2+3t$, $0 \leqslant t \leqslant 110$ e os da segunda são da forma $7+5s$, $0 \leqslant s \leqslant 30$. Devemos ter $2+3t = 7+5s$. Daí, $3t = 5(1+s)$ e t deve ser múltiplo de 5. Se $t = 5k$, $s = 3k-1$. As limitações $0 \leqslant t \leqslant 110$ e $0 \leqslant s \leqslant 30$ dão origem a uma limitação para k.

35b. Um ano não-bissexto tem 52 semanas e 1 dia; um ano bissexto tem 52 semanas e 2 dias. Logo, o ano $x+1$ começa um dia da semana adiantado em relação ao ano x, se x não é bissexto, e dois dias adiantado, se x é bissexto.

35d. Os anos se repetem em ciclos de 400 anos.

36. Procure primeiramente entender porque os calendários de 1985 e 1991 são iguais. Em segundo lugar, note que, como há mais anos não-bissextos do que bissextos, provavelmente a coleção ficará completa quando Benjamim tiver todos os calendários de anos bissextos.

37. Mostre que a razão dada é igual à razão entre os termos de ordem $\dfrac{n+1}{2}$.

41. Use o exercício 40.

42a. Use o exercício 41.

42b. $\Delta k! = k \cdot k!$.

42c. $\Delta \dfrac{1}{k} = \dfrac{-1}{k(k+1)}$.

1.2 Progressões Geométricas

Um problema interessante, que costuma deixar os alunos intrigados e os professores desconfiados, é o problema a seguir, adaptado

de um problema do exame nacional da MAA (Mathematical Association of America).

Exemplo 1. Uma pessoa, começando com R$ 64,00, faz seis apostas consecutivas, em cada uma das quais arrisca perder ou ganhar a metade do que possui na ocasião. Se ela ganha três e perde três dessas apostas, pode-se afirmar que ela:

A) ganha dinheiro.
B) não ganha nem perde dinheiro.
C) perde R$ 27,00.
D) perde R$ 37,00.
E) ganha ou perde dinheiro, dependendo da ordem em que ocorreram suas vitórias e derrotas.

Comentário. Em geral os alunos escolhem uma ordem para ver o que acontece; aliás, essa é até uma boa estratégia. Por exemplo, se ela vence as três primeiras apostas e perde as últimas três, o seu capital evolui de acordo com o esquema: $64 \to 96 \to 144 \to 216 \to 108 \to 54 \to 27$.

Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00, ela perdeu R$ 37,00. Já houve um progresso. Sabemos agora que a resposta só poderá ser C) ou E).

Em seguida oa alunos costumam experimentar uma outra ordem; por exemplo, ganhando e perdendo alternadamente. Obtêm-se: $64 \to 96 \to 48 \to 72 \to 36 \to 54 \to 27$. Nessa ordem a pessoa também perdeu R$ 37,00.

Em seguida, experimentam outra ordem, torcendo para que a pessoa não termine com R$ 27,00, o que permitiria concluir que a resposta é E). Infelizmente encontram que a pessoa novamente termina com R$ 27,00 e permanecem na dúvida. Alguns se dispõem a tentar todas as ordens possíveis, mas logo desistem ao perceber que há 20 ordens possíveis.

Solução. A melhor maneira de abordar problemas nos quais há uma grandeza variável, da qual é conhecida a taxa (porcentagem) de variação, é concentrar a atenção, não na taxa de variação da

grandeza, e sim no valor da grandeza depois da variação.

Neste problema, devemos pensar assim: Cada vez que ganha, o capital aumenta de $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ do que valia; cada vez que perde, o capital diminui de $\frac{1}{2}$ (ou seja, 50%) e passa a valer $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ do que valia.

Pensando assim, fica claro que se a pessoa vence as três primeiras apostas e perde as três últimas, a evolução de seu capital se dá de acordo com o esquema:

$$64 \to 64 \cdot \frac{3}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \to$$
$$\to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \to 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Ela termina com $64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 27$ reais. Além disso, fica claro também que se as vitórias e derrotas tivessem ocorrido em outra ordem, isso apenas mudaria a ordem dos fatores, sem alterar o produto, e a pessoa também terminaria com R$ 27,00.

Se ela começou com R$ 64,00 e terminou com R$ 27,00 ela perdeu R$ 37,00. A resposta é C). □

Exemplo 2. Aumentando de 20% o raio da base de um cilindro e diminuindo de 30% sua altura, de quanto variará seu volume?

Solução. O volume é diretamente proporcional ao quadrado do raio e à altura. Portanto, $V = kr^2h$, onde k é a constante de proporcionalidade. Sabemos que $k = \pi$, mas isso é irrelevante para o problema.

Depois da variação, os novos valores de r e de h serão $r' = 1,2r$ e $h' = 0,7h$, pois o que aumenta de 20% passa a valer 120% $= 1,2$ do que valia e o que diminui de 30% passa a valer 70% $= 0,7$ do que valia.

O novo volume será

$$V' = k(1,2r)^2 0,7\,h = 1,008\,k\,r^2\,h = 100,8\%V.$$

O volume aumenta de 0,8%. □

Exemplo 3. A população de um país é hoje igual a P_0 e cresce 2% ao ano. Qual será a população desse país daqui a n anos?

Solução. Se a população cresce 2% ao ano, em cada ano a população é de 102% da população do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a população sofre uma multiplicação por $102\% = 1,02$. Depois de n anos, a população será $P_0 \cdot 1,02^n$. □

Exemplo 4. A torcida de certo clube é hoje igual a P_0 e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a n anos?

Solução. Se a torcida decresce 5% ao ano, em cada ano a torcida é 95% da torcida do ano anterior. Portanto, a cada ano que passa, a torcida sofre uma multiplicação por $95\% = 0,95$. Depois de n anos, a torcida será $P_0 \cdot 0,95^n$. □

O que deve ter ficado claro nesses exemplos é que se uma grandeza tem taxa de crescimento igual a i, cada valor da grandeza é igual a $(1+i)$ vezes o valor anterior.

Progressões geométricas são seqüências nas quais a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Exemplo 5. A seqüência $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de 100%, o que faz com que cada termo seja igual a 200% do termo anterior. □

Exemplo 6. A seqüência $(1000, 800, 640, 512, \ldots)$ é um exemplo de uma progressão geométrica. Aqui, cada termo é 80% do termo anterior. A taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é de -20%. □

É claro então que numa progressão geométrica cada termo é igual ao anterior multiplicado por $1+i$, onde i é a taxa de crescimento dos termos. Chamamos $1+i$ de razão da progressão e representamos a razão por q.

Portanto, uma *progressão geométrica* é uma seqüência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo ante-

rior. Esse quociente constante é chamado de *razão* da progressão e é representado pela letra q. A razão q de uma progressão geométrica é simplesmente o valor de $1+i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

Exemplo 7. As seqüências $(2, 6, 18, 54, \dots)$ e $(128, 32, 8, 2, \dots)$ são progressões geométricas cujas razões valem respectivamente $q_1 = 3$ e $q_2 = \frac{1}{4}$. Suas taxas de crescimento são respectivamente $i_1 = 2 = 200\%$ e $i_2 = -\frac{3}{4} = -75\%$, pois $q = 1 + i$. □

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante.

Por exemplo, $a_{13} = a_5q^8$, pois avançamos 8 termos ao passar de a_5 para a_{13}; $a_{12} = a_7q^5$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}; $a_4 = \frac{a_{17}}{q^{13}}$, pois ao passar de a_{17} para a_4, retrocedemos 13 termos; de modo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n, avançamos $n-1$ termos.

Em muitos casos é mais natural numerar os termos a partir de zero, como foi feito nos exemplos 3 e 4; nesse caso, $a_n = a_0q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a_n. □

Exemplo 8. Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução. $a_8 = a_5q^3$, pois ao passar do quinto termo para o oitavo, avançamos 3 termos. Logo, $135 = 5q^3$ e $q = 3$. Analogamente, $a_7 = a_5q^2 = 5.\ 3^2 = 45$. O sétimo termo vale 45. □

Exemplo 9. Como em uma progressão geométrica $a_n = a_0q^n$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial $a(x) = a(0)q^x$. Portanto, pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa

função é formado por uma seqüência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial. □

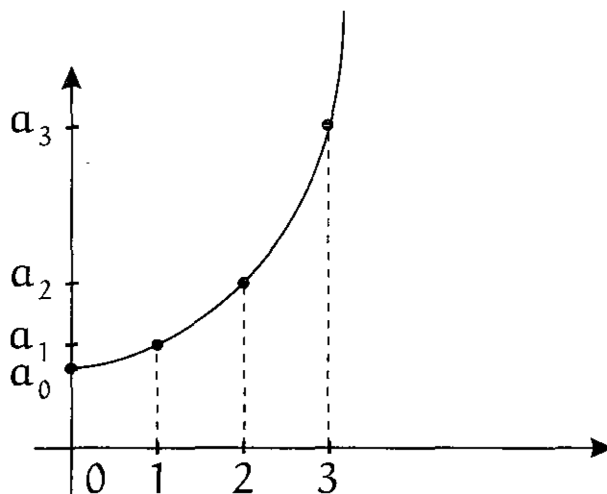


Figura 1.4

Exemplo 10. Qual é a razão da progressão geométrica que se obtém inserindo 3 termos entre os números 30 e 480?

Solução. Temos $a_1 = 30$ e $a_5 = 480$. Como $a_5 = a_1q^4, 480 = 30q^4$, $q^4 = 16$ e $q = \pm 3$. □

Um resultado importante é a fórmula que relaciona taxas de crescimento referidas a períodos de tempo diversos.

Fórmula das taxas equivalentes

Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então $1 + I = (1 + i)^n$. □

Prova. Seja G_0 o valor inicial da grandeza. Após um período de tempo T, o valor da grandeza será $G_0(1 + I)^1$. Como um período de tempo T equivale a n períodos de tempo iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $G_0(1 + i)^n$. Logo, $G_0(1 + I)^1 = G_0(1 + i)^n$ e $1 + I = (1 + i)^n$, cqd. □

Exemplo 11. Se a população de um país cresce 2% ao ano, quanto crescerá em 25 anos?

Solução. Temos $i = 2\% = 0,02$ e $n = 25$. Daí, $1 + I = (1+i)^n = (1 + 0,02)^{25} \cong 1,6406$ e $I \cong 0.6406 = 64,06\%$. Crescerá aproximadamente 64,06%. □

Exemplo 12. Uma bomba de vácuo retira, em cada sucção, 2% do gás existente em certo recipiente. Depois de 50 sucções, quanto restará do gás inicialmente existente?

Solução. Temos $i = -2\% = -0,02$ e $n = 50$. Daí, $1+I = (1+i)^n = (1 - 0,02)^{50} \cong 0,3642$ e $I \cong -0,6358 = -63,58\%$. A quantidade de gás diminuirá de aproximadamente 63,58%. Restarão aproximadamente 36,42% do gás inicialmente existente. □

Outro resultado importante é a:

Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$, é $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Prova. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$.

Multiplicando por q, obtemos

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}.$$

Subtraindo, $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, isto é, $S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n$ e, finalmente, $S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. □

Exemplo 13. Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedido pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica $1, 2, 4, \ldots$. O valor dessa soma é

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Calculando, obtemos um estupendo número de vinte dígitos:

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615. \qquad \square$$

Nas progressões geométricas em que $|q| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ temos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1-0}{1-q},$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}\cdot$$

Exemplo 14. O limite da soma $0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$ quando o número de parcelas tende a infinito é igual a $\dfrac{0,3}{1-0,1} = \dfrac{1}{3}\cdot$ O resultado é intuitivo pois somando um número muito grande de termos da progressão encontraremos aproximadamente a dízima periódica $0,333333\cdots = \dfrac{1}{3}\cdot$ $\square$

Exemplo 15. Calcule o limite da soma da progressão geométrica $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots.$

Solução. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{q_1}{1-q} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

O resultado admite uma interessante paráfrase. Suponha que Salvador deva correr 1km. Inicialmente ele corre metade dessa distância, isto é, $\frac{1}{2}$ km; em seguida ele corre metade da distância que falta, isto é, $\frac{1}{4}$ km; depois, metade da distância restante, isto é, $\frac{1}{8}$ km, e assim por diante.

Depois de n dessas etapas, Salvador terá corrido

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\,\text{km}.$$

Se n for grande, essa soma será aproximadamente igual a 1km.

□

Exemplo 16. O teorema fundamental da somação, $\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k = a_{n+1} - a_1$, também nos permitiria determinar o valor da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Supondo $q \neq 1$ e observando que $\Delta q^{k-1} = q^k - q^{k-1} = q^{k-1}(q-1)$, temos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{q-1} \sum_{k=1}^{n} \Delta q^{k-1} =$$
$$= \frac{a_1}{q-1}(q^{n+1-1} - q^0) = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \quad \square$$

Encerramos esta seção com a chamada fórmula de somação por partes. Temos $\Delta(a_k b_k) = a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k = a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + b_k(a_{k+1} - a_k) = a_{k+1}\Delta b_k + b_k \Delta a_k$. Daí resulta $a_{k+1}\Delta b_k = \Delta(a_k b_k) - b_k \Delta a_k$. Somando, obtemos a fórmula de somação por partes:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k.$$

Exemplo 17. Calcule $\sum_{k=1}^{n} k3^k$.

Solução. $\Delta 3^k = 3^{k+1} - 3^k = 3^k(3-1) = 2 \cdot 3^k$. Logo, $3^k = \frac{1}{2}\Delta 3^k$ e $\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k\Delta 3^k$.

Aplicando a fórmula de somação por partes

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}\Delta b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k \Delta a_k$$

com $a_{k+1} = k$ (logo, $a_k = k - 1$ e $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = 1$) e $b_k = 3^k$,

temos

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\Delta 3^k = \frac{1}{2}\left[n \cdot 3^{n+1} - 0 - \sum_{k=1}^{n} 3^k \cdot 1\right].$$

Mas

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k = 3\frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2}.$$

Daí resulta

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{n}{2}3^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2n-1}{4}3^{n+1} + \frac{3}{4}. \qquad \square$$

Exercícios

1. Aumentos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um aumento único de quanto?

2. Descontos sucessivos de 10% e 20% equivalem a um desconto único de quanto?

3. Um aumento de 10% seguido de um desconto de 20% equivale a um desconto único de quanto?

4. Aumentando sua velocidade em 60%, de quanto você diminui o tempo de viagem?

5. Um decrescimento mensal de 5% gera um decrescimento anual de quanto?

6. O período de um pêndulo simples é diretamente proporcional à raiz quadrada do seu comprimento. De quanto devemos aumentar o comprimento para aumentar de 20% o período?

7. Mantida constante a temperatura, a pressão de um gás perfeito é inversamente proporcional a seu volume. De quanto aumenta a pressão quando reduzimos de 20% o volume?

8. Se a base de um retângulo aumenta de 10% e a altura diminui de 10%, de quanto aumenta a área?

9. Um carro novo custa R$ 18 000,00 e, com 4 anos de uso, vale R$ 12 00,00. Supondo que o valor decresça a uma taxa anual constante, determine o valor do carro com 1 ano de uso.

10. Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente. Determine a razão dessa progressão.

11. Os lados de um triângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão?

12. Qual o quarto termo da progressão geométrica $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{2}$,...?

13. Determine três números em progressão geométrica, conhecendo sua soma 19 e a soma de seus quadrados 133.

14. A soma de três números em progressão geométrica é 19. Subtaindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Calcule-os.

15. Quatro números são tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 6, os três últimos uma progressão geométrica e o primeiro número é igual ao quarto. Determine-os.

16. Número perfeito é aquele que é igual à metade da soma dos seus divisores positivos. Por exemplo, 6 é perfeito pois a soma dos seus divisores é $1+2+3+6=12$. Prove que, se 2^p-1 é um número primo, então $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$ é um número perfeito.

17. Calcule o valor da soma de n parcelas $1+11+\cdots+111\ldots1$.

18. Mostre que o número $444\ldots488\ldots89$, formado por n dígitos iguais a 4, $n-1$ dígitos iguais a 8 e um dígito igual a 9, é um quadrado perfeito. Determine sua raiz quadrada.

19. A espessura de uma folha de estanho é 0,1mm. Forma-se uma pilha de folhas colocando-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha será, aproximadamente:

a) a altura de um poste de luz,
b) a altura de um prédio de 40 andares.
c) o comprimento da praia de Copacabana.
d) a distância Rio-São Paulo.
e) o comprimento do equador terrestre.

20. Um garrafão contém p litros de vinho. Retira-e um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea; retira-se, a seguir um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água e assim por diante. Qual a quantidade de vinho que restará no garrafão após n dessas operações?

21. Calcule a soma dos divisores de 12.600 que sejam:
a) positivos.
b) ímpares e positivos.

22. Determine as geratrizes das dízimas periódicas:
a) $0,141\,414\,141\ldots$
b) $0,345\,454\,545\ldots$
c) $0,999\,999\,999\ldots$
d) $1,711\,111\,111\ldots$

23. Determine os limites das somas abaixo:
a) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$
b) $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+\ldots$
c) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\frac{9}{32}+\ldots$
d) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots,\ -1<x<1.$
e) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots$

24. Larga-se uma bola de uma altura de 5m. Após cada choque com o solo, ela recupera apenas 4/9 da altura anterior. Determine:
a) a distância total percorrida pela bola.
b) o tempo gasto pela bola até parar.

25. Na figura abaixo temos uma linha poligonal, de lados ora perpendiculares a AB, ora perpendiculares a AC. Sendo a e b,

respectivamente, os dois primeiros lados da poligonal, pede-se determinar:

a) o comprimento da mesma.

b) o comprimento do n-ésimo lado da poligonal.

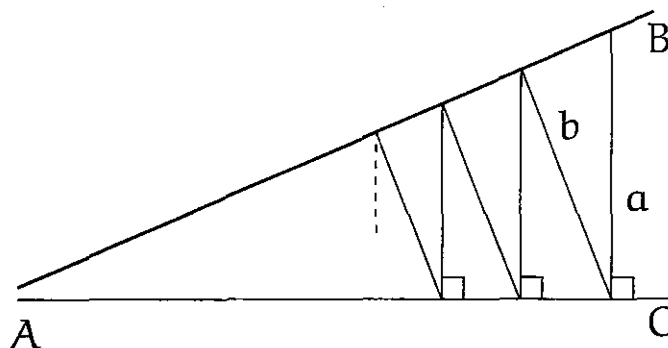


Figura 1.5

26. Na figura abaixo temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abcissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, determine:

a) o comprimento da espiral.

b) a abcissa do ponto P, ponto assintótico da espiral.

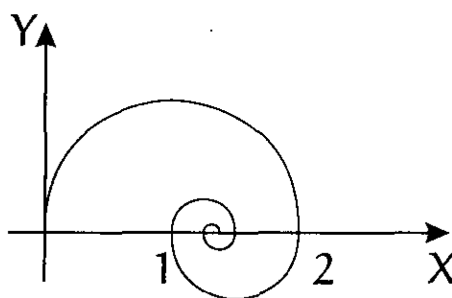


Figura 1.6

27. Na figura abaixo temos uma seqüência de círculos tangentes a duas retas. O raio do primeiro círculo é 1 e o raio do segundo é $r < 1$. Cada círculo tangencia externamente o círculo anterior. Determine a soma dos raios dos n primeiros círculos.

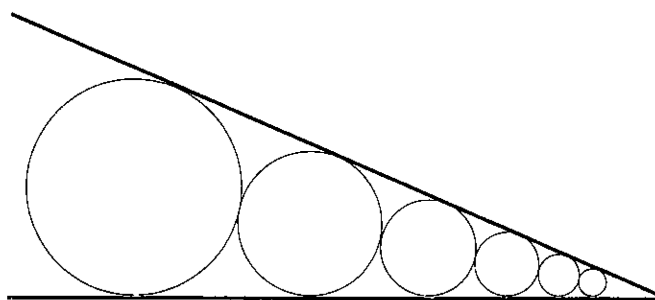


Figura 1.7

28. Uma faculdade recebe todos os anos 300 alunos novos no primeiro semestre e 200 alunos novos no segundo semestre. 30% dos alunos são reprovados no primeiro período e repetem o período no semestre seguinte. Sendo a_n e b_n, respectivamente, o número de alunos do primeiro período no primeiro e no segundo semestres do ano n, calcule $\lim a_n$ e $\lim b_n$.

29. Seja S_n a soma das áreas dos n primeiros quadrados obtidos a partir de um quadrado Q_1 de lado 1 pelo seguinte processo: "os vértices do quadrado Q_{n+1} são os pontos médios dos lados de Q_n". Determine quais das afirmações abaixo são verdadeiras:

1) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 1,9$.
2) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 2$.
3) É possível escolher S_n de modo que $S_n > 2,1$.
4) É possível escolher S_n de modo que $S_n = 2$.
5) É possível escolher S_n de modo que $S_n = 1,75$.

30. Calcule $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^{2n}}$.

31. Sendo x e y positivos, calcule:

a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ldots}}}}$ b) $\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{x\sqrt{y\ldots}}}}$

32. Começando com um segmento de tamanho 1, dividimo-lo em três partes iguais e retiramos o interior da parte central, obtendo dois segmentos de comprimento 1/3. Repetimos agora essa operação com cada um desses segmentos e assim por diante.

Sendo S_n a soma dos comprimentos dos intervalos que restaram depois de n dessas operações, determine:

a) O valor de S_n.

b) O valor de $\lim S_n$.

c) Certo livro, muito citado em aulas de análise de erros de livros didáticos, afirma que, ao final, o conjunto dos pontos não retirados é vazio. Isso é verdade?

33. Se (a_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = \log a_n$ é uma progressão aritmética.

34. Se (a_n) é uma progressão aritmética, prove que (b_n) definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica.

35. O rádio-226 tem meia-vida (período de tempo em que metade da massa inicialmente presente se desintegra) de 1600 anos. A taxa de variação da massa é constante. Em quanto tempo a terça parte da massa inicialmente presente se desintegrará?

36. Sejam $a = 111\ldots1$ (n dígitos iguais a 1) e $b = 100\ldots05$ ($n-1$ dígitos iguais a 0). Prove que $ab+1$ é um quadrado perfeito e determine sua raiz quadrada.

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determine A^n.

38. A curva de Koch é obtida em estágios pelo processo seguinte:

i) No estágio 0, ela é um triângulo equilátero de lado 1.

ii) O estágio $n+1$ é obtido a partir do estágio n, dividindo cada lado em três partes iguais, construindo externamente sobre a parte central um triângulo equilátero e suprimindo então a parte central (ver figura abaixo). Sendo P_n e A_n respectivamente o perímetro e a área do n-ésimo estágio da curva de Koch, determine:

a) P_n. b) A_n. c) $\lim P_n$. d) $\lim A_n$.

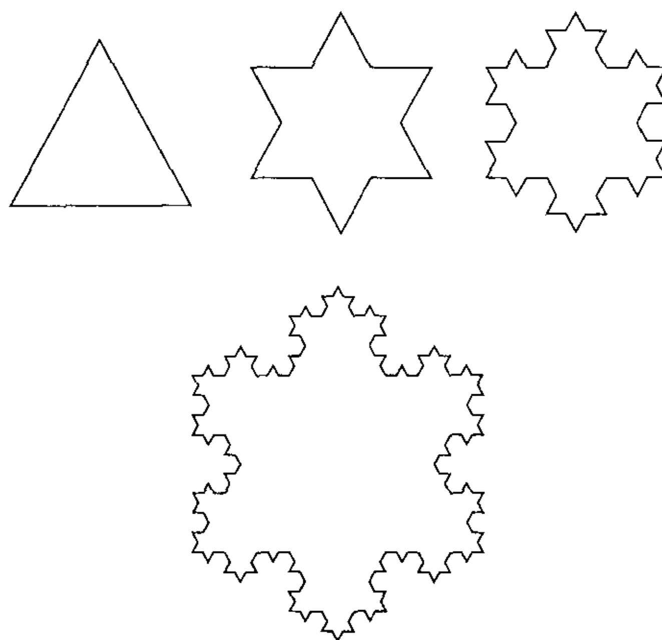


Figura 1.8

39. Pitágoras[1], que estudou a geração dos sons, observou que duas cordas vibrantes, cujos comprimentos estivessem na razão de 1 para 2, soariam em uníssono. Hoje sabemos que a razão das freqüências dos sons emitidos por essas cordas seria a razão inversa dos seus comprimentos, isto é, de 2 para 1 e que duas cordas vibram em uníssono se e só se a razão de seus comprimentos é uma potência inteira de 2.

A freqüência da nota lá-padrão (o lá central do piano) é 440 Hz e a freqüência do lá seguinte, mais agudo, é 880 Hz (Hz é a abreviatura de hertz, unidade de freqüência que significa ciclo por segundo).

A escala musical ocidental (de J.S. Bach para cá), dita cromática, divide esse intervalo em doze semitons iguais, isto é, tais que a razão das freqüências de notas consecutivas é constante.

Sabendo que essas notas são LÁ – LÁ# – SI – DÓ – DÓ# – RÉ – RÉ# – MI – FÁ – FÁ# – SOL - SOL# - LÁ, determine:

a) a freqüência desse dó, primeiro dó seguinte ao lá padrão.

[1] Pitágoras, matemático de Samos, cerca de cinco séculos e meio antes de Cristo.

b) a freqüência do sinal de discar de um telefone, que é o primeiro sol anterior ao lá padrão.
c) a nota cuja freqüência é 186 Hz.

40. A lei de Weber (Ernest Heinrich Weber; 1795-1878; fisiologista alemão), para resposta de seres humanos a estímulos físicos, declara que diferenças marcantes na resposta a um estímulo ocorrem para variações de intensidade do estímulo proporcionais ao próprio estímulo. Por exemplo, um homem, que sai de um ambiente iluminado para outro, só percebe uma variação da luminosidade se esta for superior a 2%; só distingue entre soluções salinas se a variação da salinidade for superior a 25%, etc...

Fechner (Gustav Theodor Fechner; 1801-1887; físico e filósofo alemão) propôs um método de construção de escalas baseado na lei de Weber. Propôs que enquanto os estímulos variassem em progressão geométrica, as medidas das respostas variassem em progressão aritmética.

a) Mostre que numa escala de Fechner, as medidas da resposta y e do estímulo x se relacionam por $y = a + b\log x$.
b) Uma das mais conhecidas escalas de Fechner é a que mede a sensação de ruído. Ela é definida por $L = 120 + 10\log_{10} I$, onde L é a medida da sensação de ruído em decibéis (dB) e I é a intensidade sonora, medida em W/m^2. Duas bandas de "heavy metal" provocam um ruído quantos decibéis acima do ruído provocado por uma banda?

41. Determine o valor de:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ b) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$.

Sugestões aos Exercícios

9. O valor, em mil reais, do carro com n anos de uso forma a progressão geométrica na qual $a_0 = 18$ e $a_4 = 12$. Determine a_1.

13. $a + aq + aq^2 = 19$ e $a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 133$. Divida.

14. Comece pela progressão aritmética $x - r$, x, $x + r$. A progressão

geométrica será $x - r + 1, x, x + r$. Temos $(x - r + 1) + x + (x + r) = 19$ e $\dfrac{x}{x - r + 1} = \dfrac{x + r}{x}$.

15. Os números são $x - 6, x, x + 6, x - 6$ e $\dfrac{x + 6}{x} = \dfrac{x - 6}{x + 6}$.

16. Os divisores são da forma $2^\alpha \cdot (2^p - 1)^\beta$ com $\alpha \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}$ e $\beta \in \{0, 1\}$. Para calcular a soma dos divisores, some separadamente os divisores que têm $\beta = 0$ e os que têm $\beta = 1$.

17. A k-ésima parcela da soma é $1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}$.

18. O número é $9 + 8 \cdot 10 + 8 \cdot 10^2 + \cdots + 8 \cdot 10^{n-1} + 4 \cdot 10^n + \cdots + 4 \cdot 10^{2n-1}$.

19. Cada operação dobra o número de folhas. Use $2^{10} = 1024 \cong 10^3$.

20. Em cada operação, a quantidade de vinho diminui de $\dfrac{1}{p}$.

23b. São duas progressões geométricas.

23c. Sendo S a soma pedida, calcule $\dfrac{S}{2}$ e subtraia.

23d. Sendo S a soma pedida, calcule xS e subtraia.

23e. São três progressões geométricas.

24b. O tempo que uma bola gasta, partindo do repouso, para cair de uma altura h é $\sqrt{2h/g}$ e quando uma bola é lançada do chão verticalmente para cima, o tempo gasto na subida é igual ao tempo da descida.

25. Os triângulos são semelhantes e a razão de semelhança de cada um para o anterior é sempre a mesma.

26. A abcissa do ponto assintótico é $2 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \ldots$

28. $\lim a_n = 300 + 0,3 \cdot 200 + 0,3^2 \cdot 300 + 0,3^3 \cdot 200 + \ldots$

30. Inspire-se no problema 23c).

31a. A expressão é igual a $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}} \ldots$

32c. O que acontece com os pontos de abcissas $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}$ etc?

35. Tomando 1600 anos como unidade de tempo, a massa existente no instante t é $M(t) = M(0)0,5^t$.

36. $a = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}$ e $b = 10^n + 5$.

37. $A^2 = 5A$.

38. $P_{n+1} = \frac{4}{3}$ e $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

41a. Somação por partes com $a_{k+1} = k^2$ e $\Delta b_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

41b. Somação por partes com $a_{k+1} = k$ e $\Delta b_k = 2^k$.

1.3 Sobre o Ensino de Progressões

1. Não encha a cabeça de seus alunos com casos particulares desnecessários. Isso só serve para obscurecer as idéias gerais e acaba dificultando as coisas. Saber que, numa progressão aritmética, cada termo é a média aritmética entre seu antecedente e seu conseqüente não só não substitui, ou pelo menos não substitui de modo eficiente, o conhecimento de que uma progressão aritmética é uma seqüência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante, como é uma conseqüência imediata disso. Realmente, se x, y, z estão em progressão aritmética, $y - x = z - y$. Daí, quem se interessar em calcular y obterá $y = \frac{x+z}{2}$.

Do mesmo modo são conhecimentos desnecessários:

Em uma progressão aritmética com um número ímpar de termos, o termo central é a média aritmética dos extremos.

Em uma progressão aritmética, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Em uma progressão geométrica cada termo é a média geométrica entre seu antecedente e seu conseqüente. (Seria isso verdadeiro para a progressão $1, -2, 4$?)

Em uma progressão geométrica com um número ímpar de termos, o termo central é a média geométrica dos extremos. (Seria isso verdadeiro para a progressão $1, -2, 4$?)

Em uma progressão geométrica, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

2. Na maioria dos livros se encontram as fórmulas $a_n = a_1 + (n-$

$1)r$, para progressões aritméticas e $a_n = a_1 q^{n-1}$, para progressões geométricas. Nada contra essas fórmulas, já que usualmente o que se conhece de uma progressão são o primeiro termo e a razão.

Entretanto é bom lembrar que o conhecimento apenas dessas fórmulas costuma atrapalhar muitos alunos quando a progressão começa em a_0. É certamente mais eficiente saber que para avançar um termo basta somar r ou multiplicar por q, para avançar dois termos basta somar $2r$ ou multiplicar por q^2, etc... Assim facilmente se conclui que $a_n = a_0 + nr$ e $a_n = a_1 + (n-1)r$, nas progressões aritméticas, e que $a_n = a_0 q^n$ e $a_n = a_1 q^{n-1}$, nas progressões geométricas.

3. Em alguns livros se encontram, além da fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$, fórmulas como $a_1 = a_n - (n-1)r$, $r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$, $n = 1 + \frac{a_n - a_1}{r}$, supostamente para facilitar o cálculo. Depois nos queixamos que os alunos não sabem resolver equações do primeiro grau!

Mais cedo ou mais tarde, aparecerá um livro com uma fórmula para o cálculo do 1, $1 = n - \frac{a_n - a_1}{r}$.

4. Alguns livros chegam ao cúmulo de trazerem duas versões da (desnecessária) fórmula para o cálculo de r: $r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ e $r = \frac{a_{n+2} - a_1}{n+1}$, a segunda para ser usada quando a progressão tiver $n+2$ termos, isto é, dois termos extremos e mais n termos entre eles, como no exemplo 4.

5. Alguns livros trazem uma fórmula para o cálculo do produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, $P_n = (\sqrt{a_1 a_n})^n$.

Em primeiro lugar, essa fórmula está errada. Por ela, o produto dos três primeiros termos da progressão $1, -2, 4, \ldots$ seria $(\sqrt{1 \cdot 4})^3 = 2^3 = 8$.

Em segundo lugar, se corrigirmos essa fórmula obteremos

$P_n^2 = (a_1 a_n)^n$ e, nas progressões cujos termos não são todos positivos, teremos algum trabalho em descobrir se $P_n = (a_1 a_n)^n$ ou se $P_n = -(a_1 a_n)^n$.

Em terceiro lugar, não há o menor interesse, prático ou teórico, em determinar o produto dos termos de uma progressão geométrica.

Em quarto lugar, é muito simples determinar o produto dos termos de uma progressão geométrica. Com efeito, isso já foi feito no exercício 7) da parte de progressões aritméticas.

6. Moderação nos problemas. Problemas em que são dados a soma do 24º termo com o 47º e é pedida a diferença entre o 36º e o 11º não aparecem na vida real, não são interessantes e não desenvolvem o raciocínio. Uma pergunta que devemos sempre nos fazer é a seguinte: "Se meu professor de Matemática tivesse feito estes problemas, eu teria gostado de Matemática?"

7. Tenha sempre em mente que uma progressão geométrica é uma seqüência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma e esse instrumento matemático foi criado para descrever grandezas que variam com taxa de crescimento constante. É absurdo, mas infelizmente é comum, ensinar progressões geométricas e não relacioná-las à idéia de taxa de crescimento.

8. A melhor maneira de resolver problemas com progressões com um número pequeno de termos é escrevê-las e esquecer completamente as fórmulas para calcular termos e somas de termos, conforme fizemos nos exemplos 7 e 8 de progressões aritméticas.

Entretanto, ao contrário do que ocorria com as progressões aritméticas, não há nenhuma vantagem, ao escrever progressões aritméticas, em começar pelo termo central. Chamar três números em progressão geométrica de $\frac{x}{q}$, x, xq em vez de chamá-los de x, xq, xq^2, só serve para criar desnecessariamente denominadores e complicar as contas.

9. Calculadoras são indispensáveis para a resolução de quase todos os problemas de progressões geométrica da vida real.

10. Se você ensina exponenciais e logaritmos antes de progressões, não há grandes dificuldades em falar intuitivamente de limite da soma dos termos de uma progressão geométrica pois, ao fazer os gráficos das funções exponenciais e logarítmicas, você já deve ter comentado quais os limites de a^x quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. Se a primeira noção de limite aparece no limite da soma da progressão geométrica, os exemplos 14 e 15 de progressões geométricas são muito bons.

Capítulo 2

Matemática Financeira

Uma das importantes aplicações de progressões geométricas é a Matemática Financeira.

A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo.

Alguém que dispõe de um capital C (chamado de *principal*), empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de *juro*. A soma C + J é chamada de *montante* e será representada por M. A razão $i = \frac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*.

□

Exemplo 1. Lúcia tomou um empréstimo de R$ 100,00. Dois meses após, pagou R$ 140,00. Os juros pagos por Lúcia são de R$ 40,00 e a taxa de juros é de $\frac{40}{100} = 0,40 = 40\%$ ao bimestre. O principal, que é a dívida inicial de Lúcia, é igual a R$ 100,00; o montante, que é a divida na época do pagamento, é de R$ 140,00.

□

Exemplo 2. Manuel tomou um empréstimo de 100 reais, a juros de taxa 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Manuel será acrescida de $0,10 \times 100$ reais $= 10$ reais de juros (pois $J = iC$), passando a 110 reais. Se Manuel e seu credor concordarem em adiar a liqüidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de con-

traído, por 121 reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão de $0,10 \times 110$ reais $= 11$ reais. Esses juros assim calculados são chamados de juros compostos. Mais precisamente, no regime de *juros compostos*, os juros em cada período são calculados, conforme é natural, sobre a dívida do início desse período.

As pessoas menos educadas matematicamente têm tendência a achar que juros de 10% ao mês dão em dois meses juros de 20%. Note que juros de 10% ao mês dão em dois meses de juros de 21%.

$\square$

Teorema 1. No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0(1+i)^n$.

Prova. Basta observar que os valores do capital crescem a uma taxa constante i e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão $1+i$. $\square$

Exemplo 3. Pedro investe 150 reais a juros de 12% ao mês. Qual será o montante de Pedro três meses depois?

Solução. $C_3 = C_0(1+i)^3 = 150(1+0,12)^3 = 210,74$ reais. $\square$

É importante perceber que o valor de uma quantia depende da época à qual ela está referida. Se eu consigo fazer com que meu dinheiro renda 10% ao mês, ou seja, se o dinheiro vale para mim 10% ao mês, é-me indiferente pagar agora R$ 100,00 ou pagar R$ 110,00 daqui a um mês. É mais vantajoso pagar R$ 105,00 daqui a um mês do que pagar R$ 100,00 agora. É mais vantajoso pagar R$ 100,00 agora do que pagar R$ 120,00 daqui a um mês.

No fundo, só há um único problema de Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo.

Outro modo de ler o Teorema 1, $C_n = C_0(1+i)^n$, é que uma quantia, hoje igual a C_0, transformar-se-á, depois de n períodos de tempo, em uma quantia igual a $C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:
Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1 + i)^n$.
Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1 + i)^n$. □

O exemplo a seguir é, pode-se dizer, um resumo de todos os problemas de Matemática Financeira.

Exemplo 4. Pedro tomou um empréstimo de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Dois meses após, Pedro pagou 150 reais e, um mês após esse pagamento, Pedro liqüidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Solução. Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, 300 reais, na data 0, têm o mesmo valor de 150 reais dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

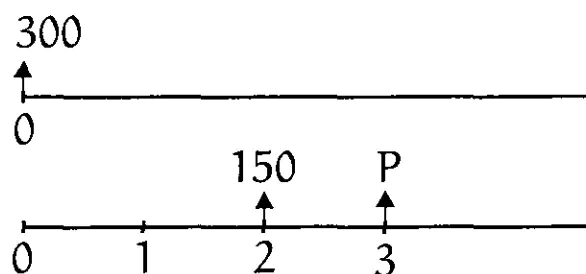


Figura 2.1

Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos

$$300 = \frac{150}{(1 + 0,15)^2} + \frac{P}{(1 + 0,15)^3}.$$

Daí, $P = 283,76$. O último pagamento foi de R$ 283,76. □

Exemplo 5. Pedro tem duas opções de pagamento na compra de um televisor:

i) três prestações mensais de R$ 160,00 cada

ii) sete prestações mensais de R$ 70,00 cada.

Em ambos os casos, a primeira prestação é paga na ato da compra. Se o dinheiro vale 2% ao mês para Pedro, qual a melhor opção que Pedro possui?

Solução. Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2. Os esquemas de pagamentos são:

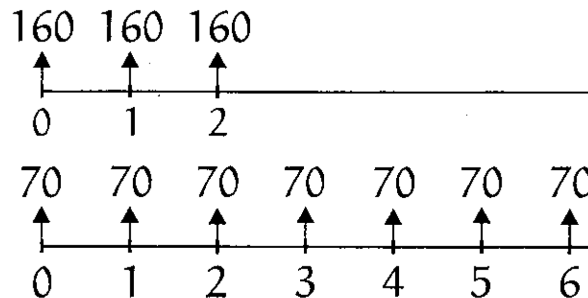


Figura 2.2

Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2.
Temos,

$$
\begin{aligned}
a &= 160(1+0,02)^2 + 160(1+0,02) + 160 = 489,66 \\
b &= 70(1+0,02)^2 + 70(1+0,02) + 70 \\
&+ \frac{70}{1+0,02} + \frac{70}{(1+0,02)^2} + \frac{70}{(1+0,02)^3} \\
&+ \frac{70}{(1+0,02)^4} = 480,77
\end{aligned}
$$

Pedro deve preferir o pagamento em seis prestações.

É absurdo que muitas pessoas razoavelmente instruídas achem que o primeiro esquema é melhor pois o total pago é de R$ 480,00 ao passo que no segundo esquema o total pago é de R$ 490,00. □

Exemplo 6. Pedro tem três opções de pagamento na compra de vestuário.

i) à vista, com 30% de desconto.
ii) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.
iii) em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para Pedro, se o dinheiro vale, para ele, 25% ao mês?

Solução. Fixando o preço do bem em 30, temos os três esquemas abaixo

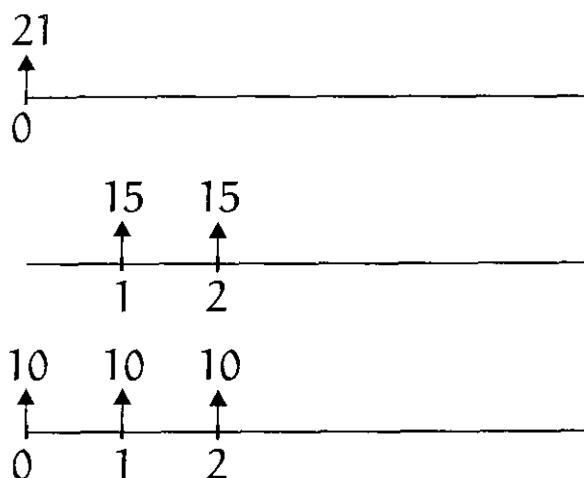


Figura 2.3

Comparando os valores, por exemplo, na época 0, obtemos:

$$a = 21$$

$$b = \frac{15}{1+0,25} + \frac{15}{(1+0,25)^2} = 21.6$$

$$c = 10 + \frac{10}{1+0,25} + \frac{10}{(1+0,25)^2} = 24,4$$

A melhor alternativa é a primeira e a pior é a em três prestações.

□

Exemplo 7. Uma loja oferece duas opções de pagamento:

i) à vista, com 30% de desconto.

ii) em duas prestações mensais iguais, sem desconto, a primeira prestação sendo paga no ato da compra.

Qual a taxa mensal dos juros embutidos nas vendas a prazo?

Solução. Fixando o valor do bem em 100, temos os esquemas de pagamento abaixo:

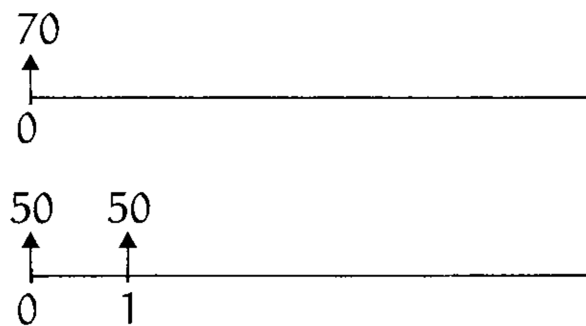


Figura 2.4

Igualando os valores, por exemplo, na época 0 (a data usada nessas comparações é chamada de data focal), obtemos $70 = 50 + \frac{50}{1+i}$. Daí, $i = 1,5 = 150\%$. A loja cobra 150% ao mês nas vendas a prazo. □

Exemplo 8. Investindo seu capital a juros mensais de 8%, em quanto tempo você dobrará o seu capital inicial?

Solução. Temos $C_0(1+0,08)^n = 2C_0$. Daí,

$$1,08^n = 2 \quad \text{e} \quad n = \frac{\log 2}{\log 1,08} \cong 9.$$

Em aproximadamente nove meses você dobrará o seu capital inicial. □

Um importante resultado que já foi obtido na seção 1.2 e será repetido é a

Fórmula das taxas equivalentes. Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que $1+I = (1+i)^n$.

Exemplo 9. A taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês é I tal que $1 + I = (1+0,12)^{12}$. Daí, $I \cong 2,90 = 290\%$ ao ano. □

Um erro muito comum é achar que juros de 12% ao mês equivalem a juros anuais de $12 \times 12\% = 144\%$ ao ano. Taxas como 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem.

Taxas proporcionais não são equivalentes. Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma frase como "244% ao ano, com capitalização mensal" significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 144% anunciada e sim a taxa mensal que lhe é proporcional.

Portanto, a tradução da expressão "144% ao ano, com capitalização mensal" é "12% ao mês". As pessoas menos educadas matematicamente podem pensar que os juros sejam realmente de 144% ao ano, mas isso não é verdade. Como vimos no exemplo 9, os juros são de 290% ao ano.

A taxa de 144% ao ano é chamada de taxa nominal e a taxa de 290% ao ano é chamada de taxa efetiva.

Exemplo 11. "24% ao ano com capitalização semestral" significa "12% ao semestre"; "1% ao mês com capitalização trimestral" significa "3% ao trimestre" e "6% ao ano com capitalização mensal" significa "0,5% ao mês".

Exemplo 12. Verônica investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Verônica?

Solução. O dinheiro de Verônica está investido a juros de taxa $i = 0,5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que $1 + I = (1 + i)^{12}$. Daí, $I = 0,0617 = 6,17\%$ ao ano. A taxa de 6% ao ano é nominal e a taxa de 6,17% ao ano é efetiva. □

Exemplo 13. A taxa efetiva semestral correspondente a 24% ao semestre com capitalização mensal é I tal que $1 + I = (1 + 0,04)^6$. Daí, $I = 26,53\%$ ao semestre. □

Um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade (apesar do nome, nada a ver com ano) ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme.

Teorema 2. O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Prova.

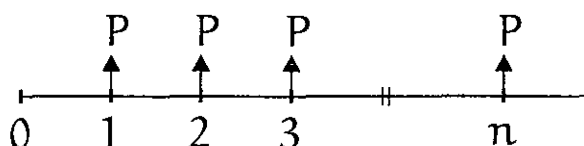


Figura 2.5

O valor da série na época 0 é

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

que é a soma de n termos de uma progressão geométrica. Temos

$$A = \frac{P}{1+i}\,\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad \square$$

O corolário seguinte trata do valor de uma renda perpétua. Rendas perpétuas aparecem em locações. Com efeito, quando se aluga um bem, cede-se a posse do mesmo em troca de um aluguel, digamos, mensal. Então, o conjunto dos aluguéis constitui uma renda perpétua ou perpetuidade.

Corolário. O valor de uma perpetuidade de termos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $\frac{P}{i}$.

Prova. Basta fazer n tender para infinito no teorema.

Exemplo 14. Um bem, cujo preço à vista é R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Solução. Um pequeno comentário: essas prestações são ditas postecipadas, pois a primeira prestação só é paga um tempo depois da compra.

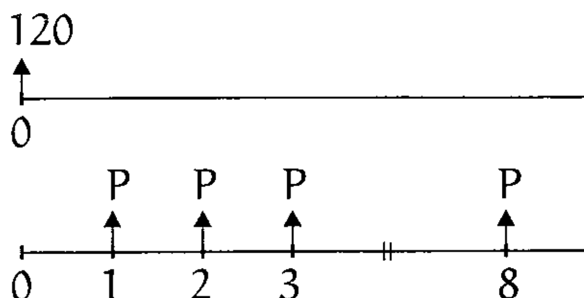


Figura 2.6

Igualando os valores na época 0 (essa é a escolha natural da data de comparação: um tempo antes do primeiro termo da série), obtemos:

$$120 = P\frac{1-(1+0,08)^{-8}}{0,08}$$

$$P = 120\frac{0,08}{1-1,08^{-8}} = 20,88.$$

As prestações são de R\$ 20,88. □

Exemplo 15. Um bem, cujo preço à vista é R\$ 120,00, é vendido em 6 prestações mensais iguais, antecipadas (isto é, a primeira é paga no ato da compra). Se os juros são de 10% ao mês, determine o valor das prestações.

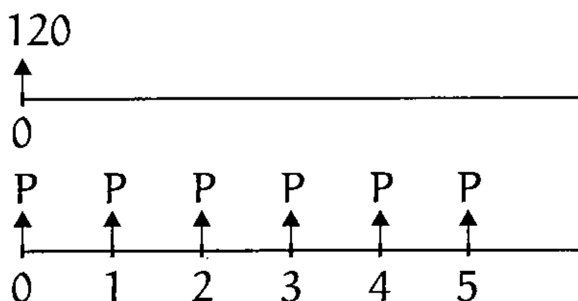


Figura 2.7

Igualando os valores na época −1 (essa escolha, que pode parecer exótica, é muito conveniente pois dispomos de uma fórmula que

calcula diretamente o valor da série nessa época), obtemos:

$$\frac{120}{1+0,1} = P\frac{1-(1+0,1)^{-6}}{0,1}$$
$$P \cong 25,05. \qquad \square$$

Exemplo 16. Se o dinheiro vale 1% ao mês, por quanto deve ser alugado um imóvel que vale 40 mil reais?

Solução. Quando você aluga um imóvel, você cede a posse do imóvel em troca de uma renda perpétua cujos termos são iguais ao valor do aluguel. Então, o valor do imóvel deve ser igual ao valor do conjunto de aluguéis. Temos, de acordo com o corolário,

$$40 = \frac{P}{i} = \frac{P}{0,01}, P = 40 \times 0,01 = 0,4\text{mil reais.}$$

Exemplo 17. Helena tem duas alternativas para obter uma copiadora:

a) Alugá-la por 35 ao ano. Nesse caso, o locador se responsabiliza pelas despesas de manutenção.
b) Comprá-la por 150. Nesse caso, já que a vida econômica da copiadora é de 5 anos, Helena venderá a copiadora após 5 anos. O valor residual da copiadora após 5 anos é de 20. As despesas de manutenção são de responsabilidade de Helena e são de 5 por ano, nos dois primeiros anos e de 8 por ano, nos anos seguintes. Se o dinheiro vale 7% ao ano, qual a melhor opção?

Solução. Vamos tomar receitas como positivas e despesas como negativas.
Na segunda alternativa, o fluxo de caixa de Helena será:

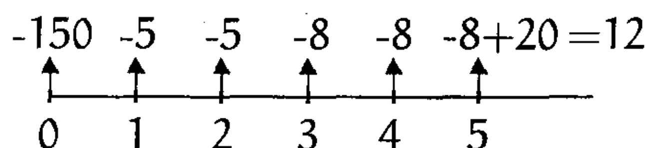


Figura 2.8

Vamos determinar o fluxo uniforme equivalente.

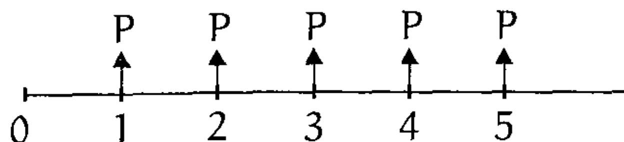


Figura 2.9

Igualando os valores na época 0, obtemos

$$-150 - \frac{5}{1,07} - \frac{5}{1,07^2} - \frac{8}{1,07^3} - \frac{8}{1,07^4} + \frac{12}{1,07^5} = P\frac{1 - 1,07^{-5}}{0,07}.$$

Daí, $P = -39,78$. Comprar a copiadora é equivalente a ter um custo anual de 39,78. Como o aluguel corresponde a um custo anual de 35,00, a melhor alternativa para Helena é alugar. □

Quando um banco empresta dinheiro (crédito pessoal ou desconto de duplicatas), o tomador do empréstimo emite uma nota promissória, que é um papel no qual o tomador se compromete a pagar ao banco, em uma data fixada, uma certa quantia, que é chamada de valor de face da promissória.

O banco então desconta a promissória para o cliente, isto é, recebe a promissória de valor de face F e entrega ao cliente uma quantia A (menor que F, naturalmente). A diferença $F - A$ é chamada de desconto.

Os bancos efetuam o desconto de acordo com a fórmula $A = F(1 - d \cdot t)$, onde d é uma taxa fixada pelo banco e chamada de taxa de desconto bancário (ou taxa de desconto simples por fora) e t é o prazo da operação, medido na unidade de tempo a que se refere a taxa.

Exemplo 18. Pedro desconta uma promissória de valor 100, com vencimento em 60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é de 12% ao mês.

a) Quanto Pedro receberá?

b) Qual a taxa mensal de juros que Pedro está pagando?

Solução. Ora, $A = F(1 - dt) = 100(1 - 0,12 \cdot 2) = 76$.
Logo, Pedro receberá agora 76, para pagar 100 em 60 dias.

Se i é a taxa mensal de juros à qual cresce a dívida de Pedro, temos $100 = 76(1+i)^2$. Daí, $i = 0,1471 = 14,71\%$.
Observe que anunciar a taxa de desconto e não a taxa de juros é um modo sutil de fazer crer aos mais ingênuos estarem eles pagando juros menores que os que realmente lhes estão sendo cobrados. □

Quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade. Uma parte do pagamento quita os juros e outra parte amortiza (abate) a dívida.

Exemplo 19. Pedro tomou um empréstimo de 100, a juros mensais de taxa 10%. Quitou-o em três meses, pagando a cada mês os juros devidos e amortizando 30% da dívida no primeiro mês e 30% e 40% nos dois meses seguintes.

Na planilha abaixo, A_k, J_k, P_k e D_k são, respectivamente, a parcela de amortização, a parcela de juros, a prestação e o estado da dívida (isto é, o valor da dívida após o pagamento da prestação) na época k.

k	P_k	A_k	J_T	D_k
0	—	—	—	100
1	40	30	10	70
2	37	30	7	40
3	44	40	4	—

Para facilitar a compreensão, olhe cada linha na ordem A_k, D_k, J_k e P_k. □

Os sistemas usuais de amortização são o sistema de amortização constante (SAC) e o sistema francês de amortização, também chamado de Tabela Price (Richard Price foi um economista inglês). O sistema francês é caracterizado por prestações constantes.

Exemplo 20. Uma dívida de 100 é paga, com juros de 15% ao mês, em 5 meses, pelo SAC. Faça a planilha de amortização.

Solução. Como as amortizações são iguais, cada amortização será de $\frac{1}{5}$ da dívida inicial.

A planilha é, portanto:

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	—	—	—	100
1	35	20	15	80
2	32	20	12	60
3	29	20	9	40
4	26	20	6	20
5	23	20	3	—

Para facilitar a compreensão, olhe cada linha na ordem A_k, D_k, J_k e P_k.

Teorema 3. No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos

$$A_k = \frac{D_0}{n}, \quad D_k = \frac{n-k}{n} D_0, \quad J_k = iD_{k-1}, \quad P_k = A_k + J_k.$$

Prova. Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a

$$A_k = \frac{D_0}{n}.$$

O estado da dívida, após k amortizações, é

$$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n} D_0.$$

As duas últimas fórmulas são óbvias. □

Exemplo 21. Uma dívida de 150 é paga, em 4 meses, pelo sistema francês, com juros de 8% ao mês. Faça a planilha de amortização.

No sistema francês, as prestações são constantes. Pelo teorema 2, cada prestação vale

$$P = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 150 \frac{0,08}{1-1,08^{-4}} = 45,29.$$

k	P_k	A_k	J_k	D_k
0	—	—	—	150,00
1	45,29	33,29	12,00	116,71
2	45,29	35,95	9,34	80,76
3	45,29	38,83	6,46	41,93
4	45,29	41,93	3,35	—

Para mais fácil compreensão, olhe cada linha na ordem P_k, J_k, A_k e D_k. □

Teorema 4. No sistema francês de amortização, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},$$

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}},$$

$$J_k = iD_{k-1}, \quad A_k = P_k - J_k.$$

Prova. A primeira fórmula é simplesmente o teorema 2 e as duas últimas fórmulas são óbvias. Quanto à segunda fórmula, observe que D_k é a dívida que será liqüidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos iguais a P_k. Portanto, novamente pelo teorema 2, temos

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de P_k, obteremos a segunda fórmula. □

Exemplo 22. Em um mês cuja inflação foi de 25%, Paulo Jorge investiu seu capital a juros de 30% ao mês. Evidentemente, isso não significa que Paulo Jorge tenha aumentado o seu poder de compra em 30%, pois, embora a quantidade de reais de Paulo Jorge tenha crescido 30%, o valor do real sofreu uma redução. Dizemos nesse caso que 30% ao mês é a taxa nominal de juros mensais de Paulo Jorge.

Suponhamos que, no início do referido mês, o capital C de Paulo Jorge pudesse comprar x artigos de preço unitário igual a p. No fim do mês, o capital passou a ser $1,3C$ e o preço unitário passou a ser $1,25p$. Logo, Paulo Jorge poderá agora comprar

$$\frac{1,3C}{1,25p} = 1,04x \text{ artigos}.$$

O poder de compra de Paulo Jorge aumentou de 4% nesse mês.

Essa taxa de 4% ao mês, à qual cresceu o poder de compra de Paulo Jorge, é chamada de taxa real de juros. □

Exemplo 23. Em algumas situações (prazos pequenos, juros de mora) são usados juros simples e não juros compostos. No regime de juros simples, os juros em cada época são calculados sobre o principal e não sobre o montante da época anterior. Por exemplo, um principal igual a 100, a juros simples de 10% ao mês evolui de acordo com a tabela abaixo:

n	0	1	2	3	4	...
C_n	100	110	120	130	140	...

Não há dificuldade em calcular juros simples pois a taxa incide sempre sobre o capital inicial. No nosso exemplo, os juros são sempre de 10% de 100, ou seja, de 10.

É claro então que, $C_n = C_0 + niC_0$, o que faz com que os valores de C_n formem uma progressão aritmética.

Olhando para os gráficos da evolução de um mesmo principal C_0 a juros de taxa i, a juros simples e a juros compostos, observamos que o montante a juros compostos é superior ao montante a juros simples, exceto se o prazo for menor que 1. É porisso que juros simples só são utilizados em cobranças de juros em prazos inferiores ao prazo ao qual se refere a taxa de juros combinada.

□

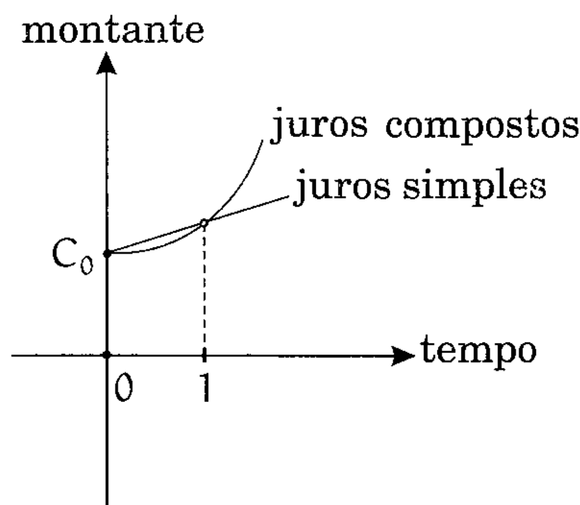


Figura 2.10

Exercícios

1. Investindo R$ 450,00 você retira, após 3 meses, R$ 600,00. A que taxa mensal de juros rendeu seu investimento?

2. Determine as taxas mensais equivalentes a 100% ao ano e a 39% ao trimestre.

3. Determine as taxas anuais equivalentes a 6% ao mês e a 12% ao trimestre.

4. Determine as taxas efetivas anuais equivalentes a:

a) 30% ao ano, com capitalização mensal.

b) 30% ao ano, com capitalização trimestral.

c) i ao ano, capitalizados k vezes ao ano.

5. Qual o limite, quando k tende para infinito, da resposta ao item c) do problema anterior? Neste caso diz-se que os juros estão sendo capitalizados continuamente e i é chamado de taxa instantânea de juros.

6. Use a resposta do problema anterior para dar uma definição financeira do número e.

7. Determine:

a) a taxa efetiva trimestral equivalente a 12% ao trimestre com capitalização contínua.
b) a taxa instantânea anual equivalente à taxa efetiva anual de 60%.
c) a taxa instantânea semestral equivalente à taxa efetiva anual de 60%.

8. A Mesbla, em vários natais, ofereceu a seus clientes duas alternativas de pagamento:
a) pagamento de uma só vez, um mês após a compra.
b) pagamento em três prestações mensais iguais, vencendo a primeira no ato da compra.
Se você fosse cliente da Mesbla, qual seria a sua opção?

9. O Foto Studio Sonora convidou, em dezembro de 1992, os seus clientes a liqüidarem suas prestações mensais vincendas, oferecendo-lhes em troca um desconto. O desconto seria dado aos que pagassem, de uma só vez, todas as prestações a vencer em mais de 30 dias, e seria de 30%, 40% ou 50%, conforme fossem pagas uma, duas ou três prestações. Supondo que o dinheiro valia 27% ao mês, a oferta era vantajosa?

10. Lúcia comprou um exaustor, pagando R$ 180,00, um mês após a compra e R$ 200,00, dois meses após a compra. Se os juros são de 25% sobre o saldo devedor, qual é o preço à vista?

11. Uma geladeira custa R$ 1 000,00 à vista e pode ser paga em três prestações mensais iguais. Se são cobrados juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor da prestação, supondo que a primeira prestação é paga:
a) no ato da compra;
b) um mês após a compra;
c) dois meses após a compra.

12. Ângela tomou um empréstimo de R$ 400,00, por dez meses. Os juros foram de 3% ao mês durante os quatro primeiros meses, de 5% ao mês durante os cinco meses seguintes e de 9% ao mês no

último mês. Calcule:

a) a taxa média de juros.

b) o montante pago.

13. Leigh investiu 30% do seu capital a juros de 10% ao mês e os 70% restantes a 18% ao mês. Qual a taxa média de juros obtida?

14. Laura quer comprar um violão em uma loja que oferece um desconto de 30% nas compras à vista ou pagamento em três prestações mensais, sem juros e sem desconto. Determine a taxa mensal de juros embutida nas vendas a prazo, supondo o primeiro pagamento:

a) no ato da compra.

b) um mês após a compra.

c) dois meses após a compra.

15. Regina tem duas opções de pagamento:

a) à vista, com x% de desconto.

b) em duas prestações mensais iguais, sem juros, vencendo a primeira um mês após a compra.

Se o dinheiro vale 5% ao mês, para que valores de x ela preferirá a segunda alternativa?

16. Um banco efetua descontos à taxa de 6% ao mês. Qual a taxa mensal de juros cobrada pelo banco nas operações:

a) de um mês?

b) de dois meses?

c) de três meses?

17. Um banco efetua descontos à taxa de 6% ao mês, mas exige que 20% do valor efetivamente liberado sejam aplicados no próprio banco, a juros de 2% ao mês. Essa é a chamada reciprocidade. Qual a taxa mensal de juros paga pelos tomadores de empréstimos por dois meses?

18. No cálculo de juros, considera-se sempre o ano comercial de 360 dias, ou seja, com 12 meses de 30 dias. Essa é a chamada "regra dos banqueiros". Os juros assim calculados são chamados

de ordinários, ao passo que os juros calculados com a ano de 365 (ou 366) dias são chamados de exatos e não são usados em lugar nenhum.

a) Mostre que, dados o principal e a taxa anual, os juros ordinários produzidos em t dias são maiores que os exatos.
b) Para um principal de R$ 1 000,00 e juros de 12% ao ano, determine os juros simples, ordinários e exatos, produzidos em 16 dias.
c) Refaça o item b) para juros compostos.

19. Uma conta de R$ 700,00 vencia no dia 25 de outubro de 1996 e foi paga em 5 de novembro de 1996. Quais os juros pagos, se os juros de mora são de 12% ao mês?

20. Determine a melhor e a pior alternativa para tomar um empréstimo por três meses:

a) juros simples de 16% ao mês.
b) juros compostos de 15% ao mês.
c) desconto bancário com taxa de desconto de 12% ao mês.

21. Henrique vai emprestar dinheiro a Mário, por quatro meses e pretende receber juros compostos de 12% ao mês. Como Mário só pretende pagar juros simples, qual a taxa mensal de juros simples que Henrique deve cobrar?

22. Quando uma operação é pactuada por um número inteiro de períodos de tempo, há três modos de calcular os juros relativos a frações de períodos:

a) Só são pagos juros nos períodos inteiros de tempo.
b) São pagos juros compostos durante todo o período. Essa é a chamada convenção exponencial.
c) São pagos juros compostos nos períodos inteiros e juros simples nas frações de períodos de tempo. Essa é a chamada convenção linear.

Evidentemente o processo a) se aplica quando os bancos pagam e, o processo c), quando recebem.

Em 5 de janeiro de 1996 foi feito um investimento de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Determine, pelos três processos, o montante em 12 de abril de 1996.

23. Um televisor, cujo preço à vista é R$ 400,00, é vendido em dez prestações mensais iguais. Se são pagos juros de 6% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor das prestações, supondo a primeira prestação paga:

a) no ato da compra.
b) um mês após a compra.
c) dois meses após a compra.

24. Se a taxa corrente de juros é de 0,6% ao mês, por quanto se aluga um imóvel cujo preço à vista é R$ 50 000,00, supondo:

a) o aluguel mensal pago vencido?
b) o aluguel mensal pago adiantadamente?

25. Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir mensalmente, durante 30 anos, para obter ao fim desse prazo, por 30 anos, uma renda mensal de R$ 100,00?

26. Supondo juros de 0,5% ao mês, quanto você deve investir mensalmente, durante 35 anos, para obter, ao fim desse prazo, uma renda perpétua de R$ 100,00?

27. Faça as planilhas de amortização de uma dívida de R$ 3 000,00, em 8 pagamentos mensais, com juros de 10% ao mês:

a) pela tabela Price.
b) pelo SAC.

28. Considere a amortização de uma dívida de R$ 35 000,00, em 180 meses, com juros de 1% ao mês, pelo sistema francês. Determine:

a) o valor da centésima prestação.
b) o estado da dívida nessa época.

29. Refaça o problema anterior pelo SAC.

30. Considere a amortização de uma dívida em 150 meses, com juros de 1% ao mês, pelo sistema francês.

a) De quanto se reduzirá a prestação, dobrando-se o prazo?
b) Que fração da dívida já terá sido amortizada na época do 75º pagamento?

31. Considere a amortização de uma dívida em 150 meses, com juros de 1% ao mês, pelo SAC.

a) De quanto se reduzirá a prestação inicial, dobrando-se o prazo?
b) Que fração da dívida já terá sido amortizada na época do 75º pagamento?

32. Uma lanterna de Gol, original, custa R$ 280,00 e tem vida útil de 5 anos. Uma lanterna alternativa custa R$ 70,00 e tem vida útil de 1 ano. Gilmar precisa trocar a lanterna de seu Gol. Considerando que o dinheiro vale 12% ao ano, que lanterna ele deve preferir?

33. Um equipamento pode ser alugado por R$ 75,00 mensais ou comprado por R$ 2 000,00. A vida útil do equipamento é de 30 meses e o valor residual ao fim desse período é de R$ 300,00. Se o equipamento for comprado, há um custo mensal de R$ 5,00 de manutenção. Considerando o valor do dinheiro de 1% ao mês, qual deve ser a decisão: comprar ou alugar?

34. As cadernetas de poupança renderam 1 416% em um ano cuja inflação foi de 1 109%. Qual a rentabilidade real?

Capítulo 3

Recorrência

3.1 Seqüências Definidas Recursivamente

Muitas seqüências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Exemplo 1. A seqüência (x_n) dos números naturais ímpares 1,3,5,7,... pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + 2$ $(n \geqslant 1)$, com $x_1 = 1$. □

Exemplo 2. Qualquer progressão aritmética (x_n) de razão r e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = x_n + r$ $(n \geqslant 1)$, com $x_1 = a$. □

Exemplo 3. Qualquer progressão geométrica (x_n) de razão q e primeiro termo a pode ser definida por $x_{n+1} = q \cdot x_n$ $(n \geqslant 1)$, com $x_1 = a$. □

Exemplo 4. A seqüência (F_n), dita de Fibonacci, cujos termos são 1, 1, 2, 3, 5,... e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geqslant 0)$, com $F_0 = F_1 = 1$. □

É fácil ver que uma recorrência, por si só, não define a seqüência. Por exemplo, a recorrência do exemplo 1, $x_{n+1} = x_n + 2$, é satisfeita não apenas pela seqüência dos números ímpares, mas por todas as progressões aritméticas de razão 2. Para que a seqüência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento do(s) primeiro(s) termo(s).

Observe que, nos exemplos 1, 2 e 3 temos recorrências de primeira ordem, isto é, nas quais cada termo é expresso em função do antecessor imediato, e que, no exemplo 4, temos uma recorrência de segunda ordem, ou seja, na qual cada termo é expresso em função dos dois antecessores imediatos. □

Exemplo 5. Quantas são as seqüências de 10 termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

Solução. Chamando de x_n o número de seqüências com n termos, o valor de x_{n+2} será a soma de:

i) o número de seqüências de $n + 2$ termos que começam por 1 e não possuem dois zeros consecutivos. Mas isso é precisamente igual a x_{n+1}, pois se o primeiro termo é 1, para formar a seqüência basta determinar os termos a partir do primeiro, o que pode ser feito de x_{n+1} modos.

ii) o número de seqüências de $n + 2$ termos que começam por 2 e não possuem dois zeros consecutivos. Analogamente, isso é igual a x_{n+1}.

iii) o número de seqüências de $n + 2$ termos que começam por 0 e não possuem dois zeros consecutivos. Se o primeiro termo é zero, temos 2 modos de escolher o segundo termo (1 ou 2) e, escolhido o segundo termo, temos x_n modos de escolher os demais. Há, pois, $2x_n$ seqüências começadas em 0.

Logo, $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$. É fácil ver que $x_1 = 3$ e que $x_2 = 8$. Daí obtemos $x_3 = 2x_2 + 2x_1 = 22$, $x_4 = 60, \ldots, x_{10} = 24\,960$. □

Exemplo 6. Seja D_n o número de permutações caóticas de $1, 2, \ldots, n$, isto é, o número de permutações simples de $1, 2, \ldots, n$, nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo. Mostre que, se $n \geqslant 1$, $D_{n+2} = (n + 1)(D_{n+1} + D_n)$.

Solução. Calculemos D_{n+2}, número de permutações simples de $1, 2, \ldots, n + 2$ nas quais nenhum elemento ocupa o seu lugar primitivo.

As permutações podem ser divididas em dois grupos: aquelas nas quais o 1 ocupa o lugar do número que ocupa o primeiro lugar e aquelas nas quais isso não ocorre.

Para formar uma permutação do primeiro grupo, devemos escolher o número que trocará de lugar com o 1, o que pode ser feito de $n+1$ modos, e, em seguida, devemos arrumar os demais n elementos nos restantes n lugares, sem que nenhum desses elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_n modos. Há $(n+1)\cdot D_n$ permutações no primeiro grupo.

Para formar uma permutação do segundo grupo, temos de escolher o lugar que será ocupado pelo número 1 (chamemos esse lugar de k), o que pode ser feito de $n+1$ modos, e, em seguida, devemos arrumar os restantes $n+1$ elementos nos demais $n+1$ lugares, sem que o elemento k ocupe o primeiro lugar e sem que nenhum dos demais elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n+1} modos.

Há $(n+1)\cdot D_{n+1}$ permutações no segundo grupo.

Portanto, $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$, como queríamos demonstrar. □

Exercícios

1. Para a seqüência definida por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, $x_0 = x_1 = 1$, determine x_5.

2. Seja x_n o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano. Caracterize x_n recursivamente.

3. Prove que uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com uma condição inicial $x_1 = a$, tem sempre uma e uma só solução.

4. Prove que uma recorrência de segunda ordem $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, com condições iniciais $x_1 = a$ e $x_2 = b$, tem sempre solução única.

5. Se $x_{n+1} = 2x_n$ e $x_1 = 3$, determine x_n.

6. Se $x_{n+1} = x_n + 3$ e $x_1 = 2$, determine x_n.

7. Seja x_n o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano. Caracterize x_n recursivamente.

8. Determine o número de permutações caóticas de 5 elementos.

9. Prove que o número de permutações caóticas de n elementos é $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Sugestões aos Exercícios

2. Seja x_n o número de regiões para n retas. Quando se acrescenta mais uma reta, ela começa criando uma região a mais e o mesmo acontece após cada interseção dela com cada uma das n retas já existentes, ou seja, se há n retas, a colocação de mais uma reta acrescenta $n + 1$ regiões às regiões já existentes.

3. Indução!

4. Indução!

5. Observe que (x_n) é uma progressão geométrica.

6. Observe que (x_n) é uma progressão aritmética.

7. Seja x_n o número de regiões para n círculos. Quando se acrescenta mais um círculo, ele cria uma região a mais após cada interseção dele com cada um dos n círculos que já existiam, ou seja, se há n círculos, a colocação de mais um círculo acrescenta $2n$ regiões às regiões já existentes.

8. $D_{n+2} = (n + 1)(D_{n+1} + D_n)$, com $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$.

9. Basta provar que $D_{n+2} = (n + 1)(D_{n+1} + D_n)$, $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$.

3.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Uma recorrência de primeira ordem expressa x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita linear se (e somente se) essa função for do primeiro grau.

Exemplo 1. As recorrências $x_{n+1} = 2x_n - n^2$ e $x_{n+1} = nx_n$ são lineares e a recorrência $x_{n+1} = x_n^2$ não é linear.

As duas últimas são ditas homogêneas, por não possuirem termo independente de x_n. □

Não há grandes dificuldades na resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 2. Resolva $x_{n+1} = nx_n$, $x_1 = 1$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

Daí, multiplicando, obtemos $x_n = (n-1)!x_1$. Como $x_1 = 1$, temos $x_n = (n-1)!$. □

Exemplo 3. Resolva $x_{n+1} = 2x_n$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 2x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= 2x_{n-1} \end{aligned}$$

Daí, multiplicando, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$. É claro que como não foi prescrito o valor de x_1, há uma infinidade de soluções para a recorrência, $x_n = C \cdot 2^{n-1}$, onde C é uma constante arbitrária. □

As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem são as da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + f(1) \\ x_3 &= x_2 + f(2) \\ x_4 &= x_3 + f(3) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + f(n-1) \end{aligned}$$

Somando, obtemos $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$. □

Exemplo 4. Resolva $x_{n+1} = x_n + 2^n$, $x_1 = 1$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2 \\ x_3 &= x_2 + 2^2 \\ x_4 &= x_3 + 2^3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}$$

Somando, resulta

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\ &= 1\frac{2^n - 1}{2 - 1} \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$ □

Exemplo 5. Resolva $x_{n+1} = x_n + n$, $x_1 = 0$.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 1 \\ x_3 &= x_2 + 2 \\ x_4 &= x_3 + 3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= x_{n-1} + (n - 1) \end{aligned}$$

Somando, resulta

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$ □

O teorema a seguir mostra que qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

Teorema 1. Se a_n é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad \text{em} \quad y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}.$$

Prova. A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad \text{em} \quad a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Mas $a_{n+1} = g(n)a_n$ pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Portanto a equação se transforma em

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n),$$

ou seja, $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$. □

Exemplo 6. Resolva $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 2$.

Solução. Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 2x_n$ é, por exemplo, $x_n = 2^{n-1}$, conforme vimos no exemplo 3.

Façamos a substituição $x_n = 2^{n-1}y_n$.

Obtemos $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$.

Daí se tem

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\ y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\ y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)} \end{aligned}$$

Somando, resulta

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)} \\ &= y_1 + 2^{-1}\frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1} \\ &= y_1 - 2^{1-n} + 1. \end{aligned}$$

Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$. Daí, $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. □

Exemplo 7. Resolva $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, $x_1 = 2$.

Solução. Uma solução não-nula de $x_{n+1} = 3x_n$ é, por exemplo, $x_n = 3^{n-1}$ (ou qualquer outra progressão geométrica de razão 3).

Façamos a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$.

Obtemos $3^n y_{n+1} = 3^n y_n + 3^n$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 1$.

Daí, y_n é uma progressão aritmética de razão 1. Logo, $y_n = y_1 + (n-1)1$.

Como $x_n = 3^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = n + 1$. Daí, $x_n = (n+1)3^{n-1}$. □

Exercícios

1. Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano. (Veja o exemplo 2 da seção de recorrência).

2. Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

3. Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

4. (A Torre de Hanói). Diz a lenda que havia em um tempo 3 estacas e n discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente os discos estavam enfiados na primeira estaca, em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. Ocupavam-se os sacerdotes em transferí-los para a terceira estaca, usando a segunda como estaca auxiliar. No processo de transferência, de cada vez se movia apenas um disco, de uma estaca para outra, e jamais um disco poderia ser colocado sobre um disco menor. Quando todos estivessem enfiados na terceira estaca, o mundo acabaria. Quantas transferências de discos, de uma estaca para outra, devem ser feitas para colocá-los na terceira estaca?

5. Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Sheila ganhar a n-ésima partida?

6. Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano. (Veja o exemplo 7 da seção 3.1).

7. Resolva a equação $x_{n+1} = (n+1)x_n + n,\ x_1 = 1$.

8. Resolva a equação $(n+1)x_{n+1} + nx_n = 2n - 3,\ x_1 = 1$.

9. Resolva a equação $x_{n+1} - nx_n = (n+1)!,\ x_1 = 1$.

10. Um círculo foi dividido em n $(n \geqslant 2)$ setores. De quantos modos podemos colorí-los, cada setor com uma só cor, se dispomos de k $(k > 2)$ cores diferentes e setores adjacentes não devem ter a mesma cor?

11. A torcida do Fluminense tem hoje p_0 membros. A taxa anual de natalidade é i, a de mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de R torcedores desiste de vez. Se $i > j$, determine o número de torcedores daqui a n anos. A torcida está condenada à extinção?

Sugestões aos Exercícios

1. $x_{n+1} = x_n + n + 1,\ x_0 = 1$.

2. O número de seqüências é a soma do número de seqüências começadas por 1 com o número de seqüêncis começadas por 0, isto é, $x_{n+1} = x_n + (2^n - x_n)$.

3. $x_{n+1} = 2x_n + (3^n - x_n),\ x_1 = 1$.

4. $x_{n+1} = 2x_n + 1,\ x_1 = 1$.

5. Para Sheila ganhar a n-ésima partida, ou ela ganha a n-ésima partida e ganha a anterior, ou ganha a n-ésima partida e perde a anterior. Obtém-se $x_{n+1} = 0,6x_n + 0,4(1 - x_n),\ x_1 = 0,4$.

6. $x_{n+1} = x_n + 2n,\ x_1 = 2$.

7. $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

10. Seja x_{n+1} o número de colorações para $n+1$ setores. Há k modos de colorir o primeiro setor e $k-1$ modos de colorir cada um dos demais setores, já que setor não pode receber a mesma cor que o setor anterior, o que daria

$k \cdot (k-1)^n$ modos de colorir os setores. Esse resultado inclui colorações nas quais o primeiro e o último setores recebem a mesma cor. Descontando o que se contou indevidamente, obtemos $x_{n+1} = k(k-1)^n - x_n$, com $x_2 = k(k-1)$.

11. $p_{n+1} = (1 + i - j)p_n - R$.

3.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Inicialmente trataremos das recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, que são recorrências da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. *Suporemos sempre* $q \neq 0$, *pois se* $q = 0$, *a recorrência é, na realidade, uma recorrência de primeira ordem.*

A cada recorrência linear de segunda ordem homogñea, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, associaremos uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada de equação característica. A nossa suposição preliminar de ser $q \neq 0$ implica 0 não ser raiz da equação característica.

Exemplo 1. A recorrência é $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ tem equação característica $r^2 = r + 1$. As raízes da equação característica são

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \qquad \square$$

O teorema a seguir mostra que se as raízes da equação característica são r_1 e r_2, então qualquer seqüência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Teorema 1. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Prova. Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, grupando convenientemente os termos,

$$C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q)$$
$$= C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0. \qquad \square$$

Exemplo 2. A equação $x_{n+2}+3x_{n+1}-4x_n = 0$ tem $r^2+3r-4=0$ como equação característica.

As raízes da equação característica são 1 e -4.

De acordo com o teorema 1, todas as seqüências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$ são soluções da recorrência. □

O teorema a seguir mostra que, se $r_1 \neq r_2$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no teorema 1.

Teorema 2. Se as raízes de $r^2+pr+q=0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções de recorrência $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$, C_1 e C_2 constantes.

Prova. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$.

Determine constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1r_1 + C_2r_2 = y_1 \\ C_1r_1^2 + C_2r_2^2 = y_2 \end{cases}$$

isto é,

$$C_1 = \frac{r_2^2y_1 - r_2y_2}{r_1r_2(r_2-r_1)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{r_1y_2 - r_1^2y_1}{r_1r_2(r_2-r_1)}.$$

Isso é possivel pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$ para todo n natural, o que provará o teorema.

Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1r_1^n - C_2r_2^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos

$$z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = (y_{n+2}+py_{n+1}+qy_n) - \\ - C_1r_1^n(r_1^2+pr_1+q) - C_2r_2^n(r_2^2+pr_2+q).$$

O primeiro parênteses é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2}+px_{n+1}+qx_n = 0$; os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2+pr+q=0$. Então $z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1r_1 + C_2r_2 = y_1$ e $C_1r_1^2 + C_2r_2^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$.

Mas, se $z_{n+2}+pz_{n+1}+qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então $z_n = 0$ para todo n, cqd. □

Exemplo 3. Quais as soluções da recorrência

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 0?$$

Solução. A equação característica é $r^2 + 3r - 4 = 0$, cujas raízes são 1 e -4. De acordo com os teoremas 1 e 2, as soluções da recorrência são as seqüências da forma $a_n = C_1 1^n + C_2(-4)^n$, isto é, $a_n = C_1 + C_2(-4)^n$, onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. □

Exemplo 4. Determine o número de Fibonacci F_n. A seqüência de Fibonacci é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_0 = F_1 = 1$.

Solução. A equação característica é $r^2 = r + 1$. As raízes da equação característica são

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Então

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar C_1 e C_2 basta usar $F_0 = F_1 = 1$.

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-o obtemos

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

isto é,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}. \qquad \square$$

Se as raízes da equação característica forem complexas, a solução $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, C_1 e C_2 constantes arbitrárias pode ser escrita de modo a evitar cálculos com complexos. Pondo as raízes na forma trigonométrica, teremos:

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta), \quad r_2 = \rho(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$$
$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta), \quad r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i\,\text{sen}\,n\theta)$$
$$C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = \rho^n[(C_1 + C_2)\cos n\theta + i(C_1 - C_2)\,\text{sen}\,n\theta]$$

$C_1 + C_2$ e $i(C_1 - C_2)$ são novas constantes arbitrárias e a solução pode ser escrita

$$a_n = \rho^n[C_1' \cos n\theta + C_2' \,\text{sen}\,n\theta]. \qquad \square$$

Exemplo 5. A recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ tem equação característica $r^2 + r + 1 = 0$. As raízes da equação característica são

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

que são complexos de módulo $\rho = 1$ e argumento principal $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}\cdot$

A solução é

$$x_n = \rho^n[C_1 \cos n\theta + C_2 \,\text{sen}\,n\theta] = C_1 \cos\frac{n\pi}{3} + C_2 \,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}\cdot \qquad \square$$

Que aconteceria se as raízes da equação característica fossem iguais?

Os teoremas a seguir respondem essa pergunta.

Teorema 3. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ é solução da recorrência

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0,$$

quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Prova. Se as raízes são iguais então $r = -\dfrac{p}{2}\cdot$

Substituindo $a_n = C_1r^n + C_2nr^n$ na recorrência

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0,$$

obtemos, grupando convenientemente os termos,

$$C_1r^n(r^2 + pr + q) + C_2nr^n(r^2 + pr + q) + C_2r^nr(2r + p)$$
$$= C_1r^n 0 + C_2nr^n 0 + C_2r^nr 0 = 0. \qquad \square$$

Teorema 4. Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = C_1r^n + C_2nr_n$, C_1 e C_2 constantes.

Prova. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determine constantes C_1 e C_2 que sejam soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} C_1r + C_2r = y_1 \\ C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2 \end{cases},$$

isto é,

$$C_1 = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

Isso é possível pois $r \neq 0$.

Afirmamos que $y_n = C_1r^n + C_2nr^n$ para todo n natural, o que provará o teorema. Com efeito, seja $z_n = y_n - C_1r^n - C_2nr^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo n. Temos

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) -$$
$$- C_1r^n(r^2 + pr + q) - C_2nr^n(r^2 + pr + q) - C_2r^nr(2r + p).$$

O primeiro parênteses é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; o segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero porque r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$; o quarto é igual a zero porque $2r + p = 0$ já que, quando $r_1 = r_2 = r$, $r - -\frac{p}{2}$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

Além disso, como $C_1r + C_2r = y_1$ e $C_1r^2 + 2C_2r^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então $z_n = 0$ para todo n, cqd. $\square$

Exemplo 6. A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ tem equação característica $r^2 - 4r + 4 = 0$. As raízes são $r_1 = r_2 = 2$ e a solução da recorrência é $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. □

O teorema a seguir mostra um processo para resolver algumas recorrências não-homogêneas.

Teorema 5. Se a_n é uma solução da equação

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$$

então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

Prova. Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtemos

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ pois a_n é solução da equação original. Logo, a equação se transformou em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0. \qquad \square$$

De acordo com o teorema 5, a solução de uma recorrência não-homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não-homogênea e a solução da homogênea. A solução da homogênea, sabemos achar. Uma solução da não-homogênea, procuraremos por tentativas.

Exemplo 7. A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.

Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n, da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$.

Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $n + 3^n$.

Que tipo de função deve ser t_n? É bastante razoável imaginar que t_n seja a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial de base 3.

Tentaremos $t_n = An + B + C3^n$. Substituindo em

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n,$$

obtemos $3An + 3B - 4A - C3^n = n + 3^n$.

t_n será solução se $3A = 1$, $3B - 4A = 0$ e $-C = 1$. Logo,

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{4}{9} \quad \text{e} \quad C = -1.$$

Daí,

$$t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n.$$

A solução da recorrência é a soma de h_n com t_n. Portanto,

$$x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n. \qquad \square$$

Exemplo 8. A recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$ tem equação característica $r^2 - 6r + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Portanto, a solução da homogênea, isto é, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $h_n = C_1 2^n + C_2 4^n$.

Tentaremos agora descobrir uma solução particular, t_n, da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$.

Ora, se substituirmos t_n em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos encontrar $1 + 2^n$.

Que tipo de função deve ser t_n? É bastante razoável imaginar que t_n seja a soma de um polinômio constante com uma exponencial de base 2.

Tentaremos $t_n = A + B2^n$. Substituindo em

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n,$$

obtemos $3A = 1 + 2^n$. Essa igualdade é impossível. A recorrência não admite solução da forma $t_n = A + B2^n$.

Parando para pensar no que aconteceu, verificamos que era óbvio que a nossa tentativa não podia dar certo. O espírito da nossa tentativa era tentar uma constante A para que obtivéssemos uma constante que igualaríamos a 1 e tentar $B2^n$ para gerar uma

exponencial que pudéssemos igualar a 2^n. É claro que o termo $B2^n$ não poderia cumprir o seu papel. $B2^n$ é solução da homogênea (é a solução da homogênea que é obtida pondo $C_1 = B$ e $C_2 = 0$) e, substituído na equação, daria zero e não uma exponencial que pudéssemos igualar a 2^n.

Vamos corrigir a nossa tentativa para $t_n = A + Bn2^n$. Sempre que na nossa tentativa algum bloco não cumprir o seu papel, fazemos a correção "aumentando o grau", isto é, multiplicando o bloco por n. Agora, substituindo obtemos $3A - 4B2^n = 1 + 2^n$.

Se $3A = 1$ e $-4B = 1$, isto é,

$$A = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad B = -\frac{1}{4},$$

temos a solução

$$t_n = \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}.$$

A solução da recorrência é a soma de h_n com t_n. Portanto,

$$x_n = C_1 2^n + C_2 4^n + \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}. \qquad \square$$

Exercícios

1. Resolva as equações a seguir:

a) $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.

b) $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

c) $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

d) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$.

e) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 3 \cdot 4^n$.

f) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$.

g) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 3^n$.

h) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n - 3^n$.

i) $x_{n+2} + x_n = 1$.

j) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 1 + n3^n$.

2. Resolva as equações a seguir:

a) $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0;\quad x_0 = 3;\quad x_1 = -6.$
b) $x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 6 - 8n;\quad x_0 = 1;\quad x_1 = 4.$
c) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 2^{n+3};\quad x_0 = 3;\quad x_1 = 6.$

3. Quantas são as seqüências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.?

4. Determine o número de modos de cobrir um tabuleiro $2 \times n$ com dominós 2×1 iguais.

5. Um casal de coelhos adultos gera mensalmente um casal de coelhos, que se tornam adultos dois meses após o nascimento. Suponha os coelhos imortais. Começando no mês 0 com um casal adulto (que terá prole apenas no mês 1), quantos casais serão gerados no mês n?

6. Uma planta é tal que cada uma de suas sementes produz, um ano após ter sido plantada, 21 novas sementes e, a partir daí, 44 novas sementes a cada ano. Se plantarmos hoje uma semente e se, toda vez que uma semente for produzida ela for imediatamente plantada, quantas sementes serão produzidas daqui a n anos?

7. O salário de Carmelino no mês n é $S_n = a + bn$. Sua renda mensal é formada pelo salário e pelos juros de suas aplicações financeiras. Ele poupa anualmente $1/p$ de sua renda e investe sua poupança a juros mensais de taxa i. Determine a renda de Carmelino no mês n.

8. Cinco times de igual força disputarão todo ano um torneio. Uma taça será ganha pelo primeiro time que vencer três vezes consecutivas. Qual é a probabilidade da taça não ser ganha nos n primeiros torneios?

9. Em um jogo, em cada etapa Olavo pode fazer 1 ou 2 pontos. De quantos modos ele pode totalizar n pontos?

10. Mostre que

$$\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$$

é, para todo n natural, um número inteiro.

11. Mostre que a parte inteira de $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$ é sempre par.

Sugestões aos Exercícios

1d. A solução particular é da forma $An + B$.

1e. A solução particular é da forma $An + B + C4^n$.

1f. A solução particular é da forma $An2^n$.

1g. A solução particular é da forma $An + B + Cn3^n$.

1h. A solução particular é da forma $An + B + Cn^2 3^n$.

1i. A solução particular é da forma A.

1j. A solução particular é da forma $A + (Bn^3 + Cn^2)3^n$.

3. Se o número de seqüências de $n+2$ termos é x_{n+2}, o número de seqüências começadas por 1 é igual a x_{n+1}, o número de seqüências começadas por 2 é igual a x_{n+1} e o número de seqüências começadas por 0 é igual a $2x_n$. Obtém-se a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n$, $x_1 = 3$, $x_2 = 8$.

4. $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

5. $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

6. $x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44(x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 + x_0)$, $x_1 = 21$, $x_2 = 485$. Para resolver, determine x_{n+1} e subtraia.

7. $x_n = S_n + iy_{n-1}$, $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{p}x_n$, onde y_n é o montante da poupança no fim do mês n. Tire o valor de y na primeira equação e substitua na segunda.

8. Qualquer time pode ganhar o primeiro torneio. Se o segundo torneio for ganho por um time diferente do que ganhou o primeiro, basta que a partir daí nenhum time ganhe três vezes consecutivas. Se o segundo torneio for ganho pelo mesmo time que ganhou o primeiro, o terceiro torneio terá que ser ganho por um time diferente e a partir daí nenhum time poderá ganhar três vezes consecutivas.

$$x_{n+2} = \frac{4}{5}x_{n+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}x_n, \quad x_1 = x_2 = 1.$$

9. Olavo em sua primeira jogada ou faz 1 ponto ou faz 2 pontos.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \, , x_1 = 1 \, , x_2 = 2.$$

10. Mostre que satisfaz a recorrência

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 4x_n = 0 \, , x_0 = 2 \, , x_1 = 1$$

11. $x_n = \left\lfloor (1+\sqrt{3})^{2n+1} \right\rfloor = (1+\sqrt{3})^{2n+1} + (1-\sqrt{3})^{2n+1}$. Mostre que x_n satisfaz a recorrência $x_{n+2} - 8x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 2$, $x_1 = 20$.

Capítulo 4

Combinatória

4.1 Princípios Básicos

O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Exemplo 1. Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução. Formar um casal equivale a tomar as decisões:

D_1: Escolha do homem (5 modos).

D_2: Escolha da mulher (5 modos).

Há $5 \times 5 = 25$ modos de formar um casal. □

Exemplo 2. Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Solução. Colorir a bandeira equivale a escolher a cor de cada listra. Há 3 modos de escolher a cor da primeira listra e, a partir daí, 2 modos de escolher a cor de cada uma das outras 6 listras. A resposta é $3 \times 2^6 = 192$. □

Exemplo 3. Quantos são os números de três dígitos distintos?

Solução. O primeiro dígito pode ser escolhido de 9 modos, pois ele não pode ser igual a 0. O segundo dígito pode ser escolhido

de 9 modos, pois não pode ser igual ao primeiro dígito. O terceiro dígito pode ser escolhido de 8 modos, pois não pode ser igual nem ao primeiro nem ao segundo dígitos.

A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$. □

Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de Combinatória:

1) *Postura.* Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. No exemplo 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria escrever o número de três dígitos; no exemplo 2, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no exemplo 1, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria formar o casal.

2) *Divisão.* Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. Formar um casal foi dividido em escolher o homem e escolher a mulher; colorir a bandeira foi dividido em colorir cada listra; formar um número de três dígitos foi dividido em escolher cada um dos três dígitos.

Vamos voltar ao exemplo anterior – Quantos são os números de três dígitos distintos? – para ver como algumas pessoas conseguem, por erros de estratégia, tornar complicadas as coisas mais simples.

Começando a escolha dos dígitos pelo último dígito, há 10 modos de escolher o último dígito. Em seguida, há 9 modos de escolher o dígito central, pois não podemos repetir o dígito já usado. Agora temos um impasse: de quantos modos podemos escolher o primeiro dígito? A resposta é “depende”. Se não tivermos usado o 0, haverá 7 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderemos usar nem o 0 nem os dois dígitos já usados nas demais casas; se já tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito.

Um passo importante na estratégia para resolver problemas de Combinatória é:

3) *Não adiar dificuldades.* Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. No exemplo 3, a escolha do primeiro dígito era uma decisão mais restrita do que as outras, pois o primeiro dígito não pode ser igual a 0. Essa é portanto a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar e, conforme acabamos de ver, postergá-la só serve para causar problemas. □

Exemplo 4. O código Morse usa duas letras, ponto e traço, e as palavras têm de 1 a 4 letras. Quantas são as palavras do código Morse?

Solução. Há 2 palavras de uma letra. Há $2 \times 2 = 4$ palavras de duas letras, pois há dois modos de escolher a primeira letra e dois modos de escolher a segunda letra; analogamente, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ palavras de tês letras e $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ palavras de 4 letras. O número total de palavras é $2 + 4 + 8 + 16 = 30$. □

Exemplo 5. Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 360? Quantos desses divisores são pares? Quantos são ímpares? Quantos são quadrados perfeitos?

Solução. a) $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Os divisores inteiros e positivos de 360 são os números da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, com

$$\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}, \beta \in \{0, 1, 2\} \quad \text{e} \quad \gamma \in \{0, 1\}.$$

Há $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras de escolher os expoentes α, β e γ. Há 24 divisores.

b) Para o divisor ser par, α não pode ser 0. Há $3 \times 3 \times 2 = 18$ divisores pares.

c) Para o divisor ser ímpar, α deve ser 0. Há $1 \times 3 \times 2 = 6$ divisores ímpares. Claro que poderíamos ter achado essa resposta subtraindo (a)-(b).

d) Para o divisor ser quadrado perfeito, os expoentes α, β e γ devem ser pares. Há $2 \times 2 \times 1 = 4$ divisores que são quadrados perfeitos. □

Exemplo 6. Quantos são os números pares de três dígitos distintos?

Solução. Há 5 modos de escolher o último dígito. Note que começamos pelo último dígito, que é o mais restrito; o último dígito só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

Em seguida, vamos ao primeiro dígito. De quantos modos se pode escolher o primeiro dígito? A resposta é "depende": se não tivermos usado o 0, haverá 8 modos de escolher o primeiro dígito, pois não poderemos usar nem o 0 nem o dígito já usado na última casa; se já tivermos usado o 0, havereá 9 modos de escolher o primeiro dígito, pois apenas o 0 não poderá ser usado na primeira casa.

Esse tipo de impasse é comum na resolução de problemas e há dois métodos para vencê-lo.

O primeiro método consiste em voltar atrás e contar separadamente. Contaremos separadamente os números que terminam em 0 e os que não terminam em 0.

Comecemos pelos que terminam em 0. Há 1 modo de escolher o último dígito, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há $1 \times 9 \times 8 = 72$ números terminados em 0.

Para os que não terminam em 0, há 4 modos de escolher o último dígito, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há $4 \times 8 \times 8 = 256$ números que não terminam em 0.

A resposta é $72 + 256 = 328$.

O segundo método consiste em ignorar uma das restrições do problema, o que nos fará contar em demasia. Depois descontaremos o que houver sido contado indevidamente.

Primeiramente fazemos de conta que o 0 pode ser usado na primeira casa do número. Procedendo assim, há 5 modos de escolher o último dígito (só pode ser 0, 2, 4, 6 ou 8), 9 modos de escolher o primeiro dígito (não podemos repetir o dígito usado na última casa; note que estamos permitindo o uso do 0 na primeira

casa) e 8 modos de escolher o dígito central. Há $5 \times 9 \times 8 = 360$ números, aí inclusos os que começam por 0.

Agora vamos determinar quantos desses números começam por zero; são esses os números que foram contados indevidamente. Há 1 modo de escolher o primeiro dígito (tem que ser 0), 4 modos de escolher o último (só pode ser 2, 4, 6 ou 8 – lembre-se que os dígitos são distintos) e 8 modos de escolher o dígito central (não podemos repetir os dígitos já usados). Há $1 \times 4 \times 8 = 32$ números começados por 0.
A resposta é $360 - 32 = 328$.

É claro que este problema poderia ter sido resolvido com um truque. Para determinar quantos são os números pares de três dígitos distintos, poderíamos fazer os números de três dígitos distintos menos os números ímpares de três dígitos distintos.

Para os números de três dígitos distintos, há 9 modos de escolher o primeiro dígito, 9 modos de escolher o segundo e 8 modos de escolher o último. Há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números de três dígitos distintos.

Para os números ímpares de três dígitos distintos, há 5 modos de escolher o último dígito, 8 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o dígito central. Há $5 \times 8 \times 8 = 320$ números ímpares de três dígitos distintos.
A resposta é $648 - 320 = 328$.

Exercícios

1. Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla-escolha, com 5 alternativas por questão?

2. Quantos subconjuntos possui um conjunto que tem n elementos?

3. De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?

4. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar

em 5 bancos de 2 lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

5. De quantos modos podemos colocar 2 reis diferentes em casas não-adjacentes de um tabuleiro 8×8? E se os reis fossem iguais?

6. De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8×8, de modo que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes?

7. De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito se a primeira carta deve ser de copas e a segunda não deve ser um rei?

8. O conjunto A possui 4 elementos e, o conjunto B, 7 elementos. Quantas funções $f: A \to B$ existem? Quantas delas são injetoras?

9. a) De quantos modos o número 720 pode ser decomposto em um produto de dois inteiros positivos? Aqui consideramos, naturalmente, 8×90 como sendo o mesmo que 90×8.
b) E o número 144?

10. Em um corredor há 900 armários, numerados de 1 a 900, inicialmente todos fechados. 900 pessoas, numeradas de 1 a 900, atravessam o corredor. A pessoa de número k reverte o estado de todos os armários cujos números são múltiplos de k. Por exemplo, a pessoa de número 4 mexe nos armários de números $4, 8, 12, \ldots$, abrindo os que encontra fechados e fechando os que encontra abertos. Ao final, quais armários ficarão abertos?

11. Dispomos de 5 cores distintas. De quantos modos podemos colorir os quatro quadrantes de um círculo, cada quadrante com uma só cor, se quadrantes cuja fronteira é uma *linha* não podem receber a mesma cor?

12. De quantos modos podemos formar uma palavra de 5 letras de um alfabeto de 26 letras, se a letra A deve figurar na palavra

mas não pode ser a primeira letra da palavra? E se a palavra devesse ter letras distintas?

13. As placas dos veículos são formadas por três letras (de um alfabeto de 26) seguidas por 4 algarismos. Quantas placas poderão ser formadas?

14. Um vagão do metrô tem 10 bancos individuais, sendo 5 de frente e 5 de costas. De 10 passageiros, 4 preferem sentar de frente, 3 preferem sentar de costas e os demais não têm preferência. De quantos modos eles podem se sentar, respeitadas as preferências?

15. Escrevem-se os inteiros de 1 até 2 222. Quantas vezes o algarismo 0 é escrito?

16. Quantos são os inteiros positivos de 4 dígitos nos quais o algarismo 5 figura?

17. Em uma banca há 5 exemplares iguais da "Veja", 6 exemplares iguais da "Manchete" e 4 exemplares iguais da "Isto é". Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca podem ser formadas?

18. Uma turma tem aulas as segundas, quartas e sextas, de 13h às 14h e de 14h às 15h. As matérias são Matemática, Física e Química, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

19. O problema do exemplo 1 – Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal? – foi resolvido por um aluno do modo a seguir: "A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 modos, pois ela pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda pessoa só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente da primeira pessoa. Há portanto $10 \times 5 = 50$ modos de formar um casal". Onde está o erro?

20. Escrevem-se números de 5 dígitos, inclusive os começados em 0, em cartões. Como 0, 1 e 8 não se alteram de cabeça para baixo

e como 6, de cabeça para baixo, se transforma em 9 e vice-versa, um mesmo cartão pode representar dois números (por exemplo, 06198 e 86190). Qual é o número mínimo de cartões para representar todos os números de 5 dígitos?

21. Qual é a soma dos divisores positivos de 360?

Sugestões aos Exercícios

2. Para formar um subconjunto você deve perguntar a cada elemento do conjunto se ele deseja participar do subconjunto.

3. A primeira pessoa pode escolher sua cadeira de 5 modos; a segunda, de 4; a terceira, de 3.

4. A primeira mulher pode escolher sua posição de 10 modos. A segunda, de 8 modos. As outras, de 6, de 4 e de 2 modos. O primeiro homem, de 5 modos. Os demais, de 4, de 3, de 2, de 1.

5. O tabuleiro de 64 casas possui 4 casas de canto (vértices), 24 casas laterais que não são vértices e 36 casas centrais. Cada casa de canto possui 3 casas adjacentes; cada lateral possui 5 casas adjacentes e cada central possui 8 casas adjacentes. Conte separadamente conforme o rei negro ocupe uma casa de canto, lateral ou central.
Se os reis fossem iguais, a resposta seria a metade da resposta anterior.

6. Haverá uma torre em cada linha. A torre da primeira linha pode ser colocada de 8 modos. A da segunda linha, de 7 modos, pois não pode ficar na mesma coluna da anterior, etc.
Se as torres são diferentes, devemos primeiramente escolher qual a torre que ficará na primeira linha (8 modos) e depois escolher onde colocá-la na primeira linha (8 modos). Há 8×8 modos de colocar a torre da primeira linha; analogamente, há 7×7 modos de colocar a torre da segunda linha etc.

7. Conte separadamente os casos em que a carta de copas é um rei e em que a carta de copas não é um rei.

8. Para construir uma função, você deve perguntar a cada elemento de A quem ele deseja flechar em B.

9a. $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ tem 30 divisores positivos.

9b. Note que $144 = 12 \times 12$.

10. O armário de número k é mexido pelas pessoas cujos números são divisores de k. Um armário ficará aberto se for mexido um número ímpar de vezes.
Lembre-se que o número de divisores positivos de $2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\gamma} \times \ldots$ é igual a $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$

11. Conte separadamente os casos em que os quadrantes 1 e 3 têm cores iguais e cores diferentes.

12. Note que no caso em que são permitidas repetições, a condição da letra A figurar na palavra é terrível, pios ela pode figurar uma só vez, ou duas, etc... Por isso é melhor contar todas as palavras do alfabeto e diminuir as que não têm A e as que começam por A.
No caso sem repetição, você poderia também contar diretamente: há 4 modos de escolher a posição do A, 25 modos de escolher a letra da primeira casa restante, 24 para a segunda casa restante, etc.

15. Conte quantas vezes o 0 aparece nas unidades, some com o número de vezes que ele aparece nas dezenas, etc.

16. Note que como são permitidas repetições, a condição do 5 figurar no número é terrível, pois ele pode figurar uma só vez, ou duas, etc... É melhor fazer todos os números menos aqueles em que o 5 não figura.

17. Para formar uma coleção, você deve decidir quantas "Veja" farão parte da coleção, etc. Não se esqueça de retirar da sua contagem a coleção vazia.

18. Há 3 modos de escolher os dias de Matemática; escolhidos os dias, digamos segundas e quartas, há 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da segunda e 2 modos de escolher o horário da aula de Matemática da quarta. Há 2 modos de escolher os dias da Física (não podem ser os mesmos da Matemática senão a Química ficaria com as aulas no mesmo dia), etc.

20. Há três tipos de cartões: os que não podem ser virados de cabeça para baixo, os que virados de cabeça para baixo continuam representando o mesmo número e os que virados de cabeça para baixo passam a representar números diferentes. Se há x, y e z cartões de cada um desses tipos, respectivamente, a resposta é $x + y + \frac{z}{2}$. É fácil calcular y, $z + y$ e $x + y + z$.

4.2 Permutações e Combinações

Há alguns (poucos) problemas de Combinatória que, embora sejam aplicações do princípio básico, aparecem com muita freqüência. Para esses problemas, vale a pena saber de cor as suas respostas. O primeiro desses problemas é o:

Problema das permutações simples

De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

A escolha do objeto que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n modos; a escolha do objeto que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n-1$ modos; a escolha do objeto que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n-2$ modos, etc...; a escolha do objeto que ocupará o último lugar pode ser feita de 1 modo.
A resposta é $n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$.

Cada ordem que se dá aos objetos é chamada de uma permutação simples dos objetos. Assim, por exemplo, as permutações simples das letras a, b e c são (abc), (acb), (bac), (bca), (cab) e (cba).

Portanto, o número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos distintos é $P_n = n!$. □

Exemplo 1. Quantos são os anagramas da palavra "calor"? Quantos começam por consoante?

Solução. Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 5 letras. O número de anagramas é $P_5 = 5! = 120$.

Para formar um anagrama começado por consoante devemos primeiramente escolher a consoante (3 modos) e, depois, arrumar as quatro letras restantes em seguida à consoante ($4! = 24$ modos). Há $3 \times 24 = 72$ anagramas começados por consoante. □

Exemplo 2. De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros diferentes de Física, de modo que livros de uma mesma

matéria permaneçam juntos?

Solução. Podemos escolher a ordem das matérias de 3! modos. Feito isso, há 5! modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe foram destinados, 3! modos para os de Estatística e 2! modos para os de Física.
A resposta é $3!5!3!2! = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8\,640$. □

Exemplo 3. Quantos são os anagramas da palavra "BOTAFOGO"?

Solução. Se as letras fossem diferentes a resposta seria 8!. Como as três letras O são iguais, quando as trocamos entre si obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto, o que aconteceria se fossem diferentes. Isso faz com que na nossa contagem de 8! tenhamos contado o mesmo anagrama várias vezes, 3! vezes precisamente, pois há 3! modos de trocar as letras O entre si.
A resposta é $\frac{8!}{3!} = 6\,720$.

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é
$P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}$. □

Exemplo 4. De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos e um de 3 objetos?

Solução. Um processo de fazer a divisão é colocar os objetos em fila; os 5 primeiros formam o grupo de 5 e os 3 últimos formam o grupo de 3.
Há 8! modos de colocar os objetos em fila.

Entretanto, note que filas como $abcde \mid fgh$ e $badce \mid ghf$ são filas diferentes e geram a mesma divisão em grupos. Cada divisão em grupos foi contada uma vez para cada ordem dos objetos dentro de cada grupo. Há 5!3! modos de arrumar os objetos em cada grupo. Cada divisão em grupos foi contada 5!3! vezes.
A resposta é $\frac{8!}{5!3!} = 56$. □

O segundo problema importante é o:

Problema das combinações simples

De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Cada seleção de p objetos é chamada de uma combinação simples de classe p dos n objetos. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a, b, c, d, e são $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$ e $\{c, d, e\}$. Representamos o número de combinações simples de classe p de n elementos por C_n^p ou $\binom{n}{p}$. Assim, $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$.

Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de $n - p$ objetos, que são os não-selecionados.
Esse é o problema do exemplo 4 e a resposta é

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \qquad \square$$

Exemplo 5. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

Solução. Para formar a comissão devemos escolher 3 dos homens e 2 das mulheres. Há $C_5^3 \cdot C_4^2 = 10 \times 6 = 60$ comissões. $\square$

Exemplo 6. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução. Há comissões com: 3 homens e 2 mulheres, 4 homens e 1 mulher, 5 homens. A resposta é

$$C_5^2 \cdot C_4^2 + C_5^4 \cdot C_4^1 + C_5^5 = 10 \times 6 + 5 \times 4 + 1 = 81. \qquad \square$$

Exemplo 7. Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R' paralela a R. Quantos triângulos e quantos quadriláteros convexos com vértices nesses pontos existem?

Solução. Para formar um triângulo ou você toma um ponto em R e dois pontos em R′, ou toma um ponto em R′ e dois pontos em R. O número de triâgulos é $5 \cdot C_8^2 + 8 \cdot C_5^2 = 140 + 80 = 220$.

Também se poderia pensar em tomar 3 dos 13 pontos e excluir dessa contagem as escolhas de pontos colineares, o que daria

$$C_{13}^3 - C_8^3 - C_5^3 = 286 - 56 - 10 = 220.$$

Para formar um quadrilátero convexo, devemos tomar dois pontos em R e dois pontos em R′, o que pode ser feito de $C_5^3 \cdot C_8^2 = 10 \cdot 28 = 280$ modos. □

Exemplo 8. De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?

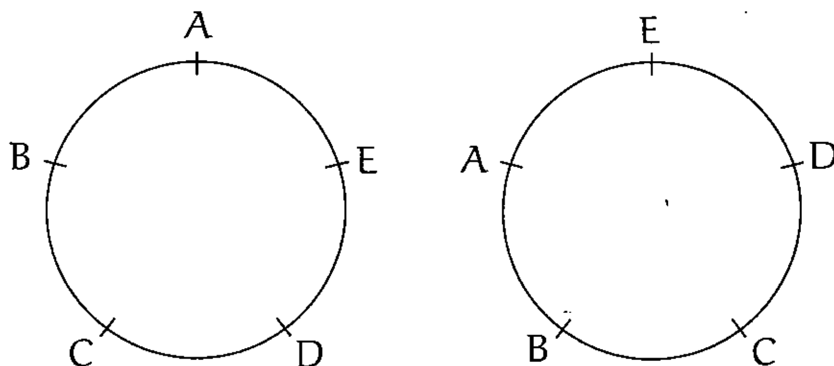


Figura 4.1

Solução. À primeira vista parece que para formar uma roda com as cinco crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $5! = 120$ modos. Entretanto, as rodas ABCDE e EABCD são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda ABCDE pode ser "virada" na roda EABCD. Como cada roda pode ser "virada" de cinco modos, a nossa contagem de 120 rodas contou cada roda 5 vezes e a resposta é $120/5 = 24$.

De modo geral, o número de modos de colocar n objetos em círculo, de modo que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais, isto é, o número de permutações circulares de n objetos é $(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$. □

O exemplo a seguir mostra um tipo de raciocínio que, apesar de inesperado, pode ser muito eficiente.

Exemplo 9. Quantos são os anagramas da palavra "BÚLGARO" que não possuem duas vogais adjacentes?

Solução. Vamos primeiramente arrumar as consoantes e, depois, vamos entremear as vogais. O número de modos de arrumar em fila as consoantes B, L, G, R é $P_4 = 4! = 24$. Arrumadas as consoantes, por exemplo na ordem BLGR, devemos colocar as vogais U, A, O nos 5 espaços da figura. Como não podemos colocar duas vogais no mesmo espaço, três dos espaços serão ocupados, cada um com uma vogal e dois dos espaços ficarão vazios. Temos $C_5^3 = 10$ modos de escolher os três espaços que serão ocupados e $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar as vogais nos espaços escolhidos.

_ B_ L_G _ R_

A resposta é $24 \times 10 \times 6 = 1\,440$. □

Exemplo 10. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$?

Solução. A resposta deste problema é representada por CR_n^p.

Para determinar o valor de CR_n^p, vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais $+$ e $\|$. Por exemplo, para a equação $x+y+z=5$, as soluções (2,2,1) e (5,0,0) seriam representadas por $++|++|+$ e $+++++||$, respectivamente. Nossa representação, as barras são usadas para separar as incógnitas e a quantidade de sinais $+$ indica o valor de cada incógnita.

Para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila com $n-1$ barras (as barras são para separar as incógnitas; para separar n incógnitas, usamos $n-1$ barras) e p sinais $+$. Ora, para formar uma fila com $n-1$ barras e p sinais $+$, basta escolher dos $n+p-1$ lugares da fila os p lugares onde serão colocados os sinais $+$, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^p modos. Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$. □

Exemplo 11. De quantos modos podemos comprar 3 sorvetes em um bar que os oferece em 6 sabores distintos?

Solução. A resposta não é $C_6^3 = 20$. C_6^3 seria o número de modos de comprar 3 sorvetes diferentes.

Chamando de x_k o número de sorvetes do k-ésimo sabor que vamos comprar, devemos determinar valores inteiros e não-negativos para x_k $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 3$. Isso pode ser feito de $CR_6^3 = C_8^3 = 56$ modos. □

Exercícios

1. Quantos são os anagramas da palavra "CAPÍTULO".

a) possíveis?
b) que começam e terminam por vogal?
c) que têm as vogais e as consoantes intercaladas?
d) que têm as letras c, a, p juntas nessa ordem?
e) que têm as letras c, a, p juntas em qualquer ordem?
f) que têm a letra p em primeiro lugar e a letra a em segundo?
g) que têm a letra p em primeiro lugar ou a letra a em segundo?
h) que têm p em primeiro lugar ou a em segundo ou c em terceiro?
i) nos quais a letra a é uma das letras à esquerda de p e a letra c é uma das letras à direita de p?

2. Se A é um conjunto de n elementos, quantas são as funções $f: A \to A$ bijetoras?

3. De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas?

4. De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que duas dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas e duas outras, Helena e Pedro, permaneçam juntas?

5. Quantas são as permutações simples dos números

$$1, 2, 3, \ldots, 10,$$

nas quais o elemento que ocupa o lugar de ordem k, da esquerda para a direita, é sempre maior que $k - 3$?

6. De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, denominados Esporte, Tupi e Minas?

7. De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas?

8. De quantos modos é possível dividir 20 objetos em 4 grupos de 3 e 2 grupos de 4?

9. Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível selecionar os jogos da primeira rodada?

10. Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 1, 2, 4, 6, 7 e escrevem-se os números assim formados em ordem crescente. Determine:

a) que lugar ocupa o número 62 417.

b) que número que ocupa o 66º lugar.

c) qual o 166º algarismo escrito.

d) a soma dos números assim formados.

11. De quantos modos é possível colocar r rapazes e m moças em fila de modo que as moças permaneçam juntas?

12. Quantos dados diferentes é possível formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo?

a) Suponha uma face de cada cor.

b) Suponha as faces iguais.

c) Suponha que as faces são iguais e que a soma dos pontos de faces opostas deva ser igual a 7.

13. Resolva o problema anterior, no caso b), para os outros 4 poliedros regulares.

14. Determine n para que $\sum_{k=1}^{n} k!$ seja um quadrado perfeito.

15. Quantos são os anagramas da palavra "ESTRELADA"?

16. O conjunto A possui n elementos. Quantos são os seus subconjuntos com p elementos?

17. Uma faculdade realiza seu vestibular em dois dias de provas, com 4 matérias em cada dia. Este ano a divisão foi: Matemática, Português, Biologia e Inglês no primeiro dia e Geografia, História, Física e Química no segundo dia. De quantos modos pode ser feito o calendário de provas?

18. Qual é o erro da solução abaixo?
"Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?
Solução: Primeiramente vamos escolher 3 homens paa a comissão, o que pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos. Agora devemos escolher mais duas pessoas para a comissão, homens ou mulheres, entre as 6 pessoas restantes, o que pode ser feito de $C_6^2 = 15$. A resposta é $10 \times 15 = 150$."

19. Quantas diagonais possui:
a) um octaedro regular?
b) um icosaedro regular?
c) um dodecaedro regular?
d) um cubo?
e) um prisma hexagonal regular?

20. Sejam $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, com $m \leqslant n$. Quantas são as funções $f \colon I_m \to I_n$ estritamente crescentes?

21. Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?

22. Quantos são os subconjuntos de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com p elementos, nos quais:
a) a_1 figura;
b) a_1 não figura;
c) a_1 e a_2 figuram;

d) pelo menos um dos elementos a_1, a_2 figura;
e) exatamente um dos elementos a_1 e a_2 figura.

23. De um baralho de pôquer (7, 8, 9, 10, valete, dama, rei e ás, cada um desses grupos aparecendo em 4 naipes: copas, ouros, paus, espadas), sacam-se simultaneamente 5 cartas.

a) Quantas são as extrações possíveis?

Quantas são as extrações nas quais se forma:

b) um par (duas cartas em um mesmo grupo e as outras três em três outros grupos diferentes)?
c) dois pares (duas cartas em um grupo, duas em outro grupo e uma em um terceiro grupo)?
d) uma trinca (três cartas em um grupo e as outras duas em dois outros grupos diferentes)?
e) um "four" (quatro cartas em um grupo e uma em outro grupo)?
f) um "full hand" (três cartas em um grupo e duas em outro grupo)?
g) uma seqüência (5 cartas de grupos consecutivos, não sendo todas do mesmo naipe)?
h) um "flush" (5 cartas do mesmo naipe, não sendo elas de 5 grupos consecutivos)?
i) um "straight flush" (5 cartas de grupos consecutivos, todas do mesmo naipe)?
j) um "royal straight flush" (10, valete, dama, rei e ás de um mesmo naipe)?

24. O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções $f: A \to B$ sobrejetoras para: a) $p = n$; b) $p = n + 1$; c) $p = n + 2$.

25. Considere um conjunto C de 20 pontos do espaço que tem um subconjunto C_1 formado por 8 pontos coplanares. Sabe-se que toda vez que 4 pontos de C são coplanares, então eles são pontos de C_1. Quantos são os planos que contêm pelo menos três pontos de C?

26. Uma fila de cadeiras no cinema tem 10 poltronas. De quan-

tos modos 3 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

27. Quantos são os anagramas da palavra "PARAGUAIO" que não possuem consoantes adjacentes?

28. De quantos modos podemos selecionar p elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ sem selecionar dois números consecutivos?

29. Onze cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?

b) Na situação do item a), quantas chaves cada cientista deve ter?

30. Depois de ter dado um curso, um professor resolve se despedir de seus 7 alunos oferencendo, durante 7 dias consecutivos, 7 jantares para 3 alunos cada. De quantos modos ele pode fazer os convites se ele não deseja que um mesmo par de alunos compareça a mais de um jantar?

31. Formam-se as combinações simples de classe 5 dos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$, as quais são escritas com os elementos em ordem crescente de índices. Quantas são as combinações nas quais o elemento a_8 ocupa o 3º lugar?

32. De quantos modos é possível colocar em fila h homens e m mulheres, todos de alturas diferentes, de modo que os homens entre si e as mulheres entre si fiquem em ordem crescente de alturas?

33. Em uma escola, x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a) Calcule x.

b) Determine quantos professores há em cada banca.

34. A partir de um conjunto de a atletas formam-se t times de k atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número de vezes. Determine:

a) de quantos times cada atleta participa;

b) em quantos times cada par de atletas fica junto.

35. De quantos modos podemos formar uma mesa de buraco com 4 jogadores?

36. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 5 meninos e 5 meninas de modo que pessoas de mesmo sexo não fiquem juntas?

37. De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 6 crianças, de modo que duas delas, Vera e Isadora, não fiquem juntas?

38. Quantas são as soluções inteiras e positivas de $x+y+z=7$?

39. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas de $x+y+z \leqslant 6$?

40. Uma indústria fabrica 5 tipos de balas que são vendidas em caixas de 20 balas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montados?

Sugestões aos Exercícios

1c. Os anagramas podem começar por vogal ou por consoante.

1d. Tudo se passa como se cap fosse uma letra só.

1e. Escolha inicialmente a ordem das letras c,a,p. Recai-se no item anterior.

1g. Ao somar os que têm p em primeiro com os que têm a em segundo, os que têm p em primeiro e a em segundo são contados duas vezes. Um diagrama de conjuntos ajuda.

1h. Um diagrama de conjuntos ajuda.

1i. Há $3! = 6$ ordens possíveis para essas letras. A resposta é $\frac{1}{6}$ do total de anagramas.

3. Faça o total menos aquelas nas quais elas ficam juntas. Não se esqueça que elas podem ficar juntas em 2! ordens possíveis.

4. Faça todas com Helena e Pedro juntos menos aquelas nas Helena e Pedro estão juntos e Vera e Paulo também estão juntos.

5. As posições mais restritas são as últimas.

6. Você deve escolher 5 jogadores para o Esporte, depois escolher 5 dos que sobraram para o Tupi e formar o Minas com os restantes. Ou então, ponha os 15 jogadores em fila: os 5 primeiros formam o Esporte, os 5 seguintes o Tupi, os 5 últimos o Minas. Note que, trocando a ordem dentro de cada bloco, você muda a fila mas não muda a divisão em times.

7. A resposta é a anterior dividida por 3!, pois agora, trocando os times entre si, a divisão é a mesma.

9. Você pode colocar os 12 times em uma matriz 6×2. Note que trocar as linhas entre si, ou trocar em uma linha a ordem dos elementos não altera a seleção dos jogos. Você também poderia pensar assim: Tenho 11 modos de escolher o adversário do Botafogo; depois tenho 9 modos de escolher o adversário do primeiro (em ordem alfabética) time que sobrou, depois tenho 7...

10a. Para descobrir o lugar do 62 417 você tem que contar quantos números o antecedem. Antecedem-no todos os números começados em 1, em 2, em 4, em 61, etc.

10c. O 166º algarismo escrito é o 1º algarismo do 34º número.

10d. A soma das unidades dos números é $(1 + 2 + 4 + 6 + 7) \cdot 4!$, pois cada um dos algarismos 1,2,4,6,7 aparece como algarismo das unidades em 4! números. Determine analogamente a soma das dezenas, etc.
Um truque, bonito, mas truque, é grupar os $5! = 120$ números em 60 casais do seguinte modo: o cônjuge de cada número é o número que dele se obtém trocando a posição do 1 com o 7 e a posição do 2 com o 6. Teremos 60 casais e a soma em cada casal é 88 888. A resposta é $88\,888 \times 60$.

12a. Devemos colocar 6 números em 6 lugares. A resposta é 6!.

12b. Agora, quando mudamos o cubo de posição obtemos o mesmo dado. Por exemplo, um dado que tem o 1 e o 6 em faces opostas: Antes, colocar o 1 em cima, na face preta, e o 6 em baixo, na face branca, era difernte de colocar o 6 em cima e o 1 embaixo. Agora não, é o mesmo dado de cabeça para baixo. A resposta é a anterior dividida pelo número de posições de colocar um cubo. Há 6 modos de escolher a face que fica em baixo e 4 modos de escolher nessa face a aresta que fica de frente.

14. Se $k > 4$, $k!$ termina em 0.

19. Os segmentos que ligam dois vértices são diagonais, arestas ou diagonais de faces.

20. A função fica determinada quando se escolhem os m elementos de I_n que formarão a imagem.

21. Ignore o problema do 0 na primeira casa. Escolha os lugares dos 4, dos 8, preencha as casas restantes. Desconte os números começados em 0.

23b. Há 8 modos de escolher o grupo das suas cartas que formarão o par propriamente dito; há C_4^2 modos de escolher os naipes dessas cartas; há C_7^3 modos de escolher os grupos das outras três cartas e 4^3 modos de escolher seus naipes.

24a. Essas funções são bijetoras.

24b. Um elemento de B tem sua imagem inversa formada por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias.

24c. Há duas possibilidades: um elemento de B tem sua imagem inversa formada por três elementos e os demais têm imagens inversas unitárias ou dois elementos de B têm imagens inversas formadas por dois elementos e os demais têm imagens inversas unitárias.

26. Escolhida a ordem em que cada casal vai se sentar (marido à direita, mulher à esquerda ou vice-versa), você tem que formar uma fila com 3 casais e 4 lugares vazios.

27. Arrume primeiramente apenas as vogais e depois entremeie as consoantes.

28. Marque, no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, com o sinal $+$ os elementos selecionados para o subconjunto e com o sinal $-$ os elementos não selecionados. Você

tem que formar uma fila com p sinais $+$ e $n-p$ sinais $-$, sem que haja dois sinais $+$ adjacentes.

29. Um grupo de 4 cientistas, ABCD, é barrado por pelo menos um cadeado. Na situação do número mínimo de cadeados, por exatamente um cadeado. Batizemos esse cadeado de ABCD, A, B, C, D não têm a chave desse cadeado e todos os outros cientistas a têm. Não pense mais nos cadeados e sim nos seus nomes.

30. Prove inicialmente que cada aluno comparece a exatamente 3 jantares.

33. Um bom nome para o professor que pertence às bancas 1 e 2 é professor $1-2$.

38. Chamando x de $1+a$, y de $1+b$ e z de $1+c$, você tem de determinar soluções inteiras e não-negativas para $a+b+c=4$.

39. Defina, para cada solução, a folga, que é a diferença entre o valor máximo que $x+y+z$ poderia atingir e o valor que $x+y+z$ realmente atinge. Por exemplo, a solução $x=1, y=2, z=1$ tem folga 2. Cada solução da inequação $x+y+z \leqslant 6$ corresponde a uma solução da equação $x+y+z+f=6$ e vice-versa.

4.3 O Triângulo Aritmético

Chamamos de triângulo aritmético de Tartaglia[1]-Pascal[2] ao quadro abaixo, formado com os diversos valores de C_n^p.

C_0^0							1					
C_1^0	C_1^1						1	1				
C_2^0	C_2^1	C_2^2					1	2	1			
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3				1	3	3	1		
C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4			1	4	6	4	1	
C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5		1	5	10	10	5	1

....

[1]Tartaglia, Nicolo Fontana (1500-1557), matemático italiano.

[2]Pascal, Blaise (1623-1662), matemático, filósofo e físico francês.

Observe que, numerando as linhas e colunas a partir de zero, C_n^p aparece na linha n e coluna p.

A propriedade que permite construir rapidamente o triângulo é a relação de Stifel[3], que diz que somando dois elementos lado a lado no triângulo obtém-se o elemento situado embaixo do da direita. Assim, a próxima linha do triângulo seria

$$1,\quad 1+5=6,\quad 5+10=15,\quad 10+10=20,\quad 10+5=15,\quad 5+1=6,\quad 1.$$

Relação de Stifel. $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Prova. Considere um conjunto A de $n+1$ elementos, um dos quais é x. O número de subconjuntos de A com $p+1$ elementos é C_{n+1}^{p+1}. Esse número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais x não figura, C_n^{p+1}, com o número de subconjuntos nos quais x figura, C_n^p, cqd. □

Outra relação importante é o:

Teorema das Linhas. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Prova. Basta observar que os dois membros são iguais ao número de subconjuntos de um conjunto com n elementos. □

Exemplo 1. Um palácio tem 7 portas. De quantos modos pode ser aberto o palácio?

Solução. Há C_7^1 modos de abrir o palácio abrindo uma só porta, C_7^2 modos de abrir o palácio abrindo duas portas, etc.
A resposta é

$$C_1^1 + C_7^2 + \cdots + C_7^7 = 2^7 - C_7^0 = 128 - 1 = 127. \quad \square$$

Finalmente, a relação que declara que, em cada linha, elementos equidistantes dos extremos são iguais.

Relação das Combinações Complementares. $C_n^p = C_n^{n-p}$.

[3]Stifel, Michael (1487?-1567), algebrista alemão.

Prova. Basta observar que o número de modos de escolher, entre n objetos, p objetos para usar é igual ao de escolher $n-p$ objetos para não usar. □

4.4 O Binômio de Newton[4]

A fórmula do binômio de Newton é a fórmula que dá o desenvolvimento de $(x+a)^n$.

Para obtê-la basta multiplicar

$$(x+a)\cdot(x+a)\cdot\ldots\cdot(x+a).$$

O termo genérico do produto é obtido tomando em p dos fatores, $p = 0, 1, 2, \ldots, n$, a segunda parcela e tomando nos restantes $n-p$ fatores a primeira parcela. Como isso pode ser feito de C_n^p modos, o termo genérico do produto é $C_n^p\, a^p\, x^{n-p}$ e

$$\begin{aligned}(x+a)^n &= \sum_{p=0}^{n} C_n^p\, a^p\, x^{n-p}\\ &= C_n^0\, a^0 x^n + C_n^1\, a^1 x^{n-1} + C_n^2\, a^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^n\, a^2 x^0.\end{aligned}$$

Exemplo 1. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de

$$\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^7.$$

Solução. O termo genérico do desenvolvimento é

$$C_7^p\left(\frac{-1}{x}\right)^p (x^4)^{7-p} = C_7^p(-1)^p x^{28-5p}.$$

O termo em x^3 é obtido se $28 - 5p = 3$, ou seja, se $p = 5$.
O termo procurado é $C_7^5(-1)^5 x^3 = -21x^3$. O coeficiente é -21. □

Exemplo 2. Determine o termo máximo do desenvolvimento de

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{50}.$$

[4]Newton, Isaac (1642-1727), matemático e físico inglês.

Solução. O termo genérico do desenvolvimento é

$$t_p = C_n^p a^p x^{n-p} = C_{50}^p \left(\frac{1}{3}\right)^p.$$

Vamos descobrir para que valores de p os termos crescem. Para isso, calculamos

$$\begin{aligned} t_p - t_{p-1} &= C_{50}^p \left(\frac{1}{3}\right)^p - C_{50}^{p-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} \\ &= \frac{50!}{p!(50-p)!3^p} - \frac{50!}{(p-1)!(51-p)!3^{p-1}} \\ &= \frac{50!}{(p-1)!(50-p)!3^{p-1}} \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{51-p}\right) \\ &= \frac{50!}{(p-1)!(50-p)!3^{p-1}} \left(\frac{51-4p}{3p(51-p)}\right). \end{aligned}$$

Temos $t_p - t_{p-1}$ positivo, isto é, $t_p > t_{p-1}$ quando $51 - 4p > 0$ e temos $t_p < t_{p-1}$ quando $51 - 4p < 0$.

Portanto, $t_p > t_{p-1}$ quando $p \leqslant 12$ e $t_p < t_{p-1}$ quando $p \geqslant 13$. Logo, $t_0 < t_1 < \cdots < t_{11} < t_{12} > t_{13} > t_{14} > \cdots > t_{50}$. O termo máximo é

$$t_{12} = \frac{C_{50}^{12}}{3^{12}}.$$

Exercícios

1. Com 7 vitaminas diferentes, quantos coquetéis de duas ou mais vitaminas podemos formar?

2. Determine p para que seja máximo:

a) C_{10}^p

b) C_{21}^p

3. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}.$$

4. Determine o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2 \cdot (x+2)^n$.

5. Determine o valor da soma $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2C_n^2 + \cdots + 3^nC_n^n$.

6. Se $(1+x+x^2)^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{2n}x^{2n}$, determine o valor de:

a) $A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{2n}$

b) $A_0 + A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n}$.

7. Determine o termo máximo do desenvolvimento de

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

8. Prove que $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$.

Sugestões aos Exercícios

3. O termo independente de x é o termo em x^0.

5. A soma pedida é o desenvolvimento de um binômio de Newton.

6a. Faça $x = 1$.

6b. Faça $x = -1$.

8. $101 = 100 + 1$ e $99 = 100 - 1$. O melhor modo de mostrar que $a > b$ é mostrar que $a - b$ é positivo.

4.5 Sobre o Ensino de Combinatória

1. Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as idéias gerais e torna as coisas mais complicadas. Quem troca o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjos, permutações e combinações tem dificuldade de resolver até mesmo o nosso segundo exemplo (o das bandeiras).

2. Aprenda e faça com que os alunos aprendam com os erros. É importante, diante de uma solução errada, analisar porque ela está errada.

3. Você quer mostrar que é o bom ou quer que seus alunos aprendam? Se você prefere a segunda alternativa, resista à tentação de em cada problema buscar solução mais elegante. O que deve ser procurado é um método que permita resolver muitos problemas e não um truque que resolva maravilhosamente um problema. Sendo mais específico: no exemplo 6, da seção de princípios básicos, foram apresentados dois métodos e um truque. Não se deve mostrar o truque antes de mostrar os métodos. A beleza de alguns truques só pode ser apreciada por quem tem domínio dos métodos.

Combinatória não é difícil; impossível é aprender alguma coisa apenas com truques em vez de métodos.

4. Não dê preferência a raciocínios destrutivos, raciocínios do tipo contar a mais e depois descontar o que não servia e foi contudo indevidamente. Os raciocínios que resolvem a maior parte dos problemas de Combinatória são essencialmente construtivos. Embora em certos casos seja melhor usar um raciocínio destrutivo, seus alunos só se sentirão seguros quando dominarem os raciocínios construtivos.

Por exemplo, no exemplo 7 da parte de combinações, a primeira solução apresentada é melhor do que a segunda para educar o raciocínio do aluno.

5. Um processo seguro de tornar as coisas complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações? Como se resolveriam, por exemplo, os problemas dos exemplos 2, 3 e 5 da seção 2.1 e os problemas propostos números 10, 14, 17 e 19 da mesma seção? Aliás, para que servem arranjos?

Capítulo 5

Probabilidade

5.1 Conceitos Básicos

Experiências que repetidas sob as mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes são chamadas de *aleatórias*. Por exemplo, retira-se uma carta de um baralho e verifica-se se ela é ou não um curinga; compra-se uma lâmpada e verifica-se se ela queima ou não antes de 100h de uso; joga-se um dado até se obter um seis e conta-se o número de lançamentos.

Chamaremos de *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por S e só vamos considerar aqui o caso de S ser finito ou infinito enumerável. Os subconjuntos de S serão chamados de *eventos*. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento. □

Exemplo 1. Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{\text{cara, coroa}\}$ e há 4 eventos: $\varnothing$, $A = \{\text{cara}\}$, $B = \{\text{coroa}\}$ e S. $\varnothing$ é um evento que não ocorre nunca e é chamado de evento impossível. O evento A ocorre se e somente se o lançamento resulta em cara. S ocorre sempre e é chamado de evento certo. □

Exemplo 2. Lança-se um dado e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e há 64 eventos. Alguns desses eventos são: $\varnothing$, que não ocorre nunca; S, que ocorre sempre; $A = \{2, 4, 6\}$, que ocorre se e somente se o resultado do lançamento for par, etc.

Se o resultado do lançamento for seis, ocorrem os eventos $\{6\}$, $\{5,6\}$, $\{2,4,6\}$ etc. □

Exemplo 3. Se A e B são eventos em um mesmo espaço amostral S, $A \cup B$ é o evento que ocorre se e somente se ocorre o evento A ou ocorre o evento B, isto é, ocorre pelo menos um dos eventos A e B; $A \cap B$ é o evento que ocorre se e somente se ocorrem ambos os eventos A e B; $A - B$ é o evento que ocorre se e somente se ocorre o evento A mas não ocorre o evento B; $\overline{A}$, chamado de evento oposto a A, é o evento que ocorre se e somente se o evento A não ocorre. □

Associaremos a cada evento um número, que chamaremos de probabilidade do evento e que traduzirá nossa confiança na capacidade do evento ocorrer.

Definição. Uma *probabilidade* é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:

i) Para todo evento A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
ii) $P(S) = 1$
iii) Se A e B são eventos *mutuamente excludentes*, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \varnothing$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. □

Exemplo 4. Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{\text{cara, coroa}\}$ e há 4 eventos: $\varnothing$, $A = \{\text{cara}\}$, $B = \{\text{coroa}\}$, S. Uma probabilidade que pode ser definida é

$$P_1(\varnothing) = 0, P_1(A) = P_1\{\text{cara}\} = 0,5, P_1(B) = P_1\{\text{coroa}\} = 0,5$$

e $P_1(S) = 1$. Verifique que as três condições da definição de probabilidade são satisfeitas.

Outra probabilidade que pode ser definida é

$$P_2(\varnothing) = 0, P_2(A) = P_2\{\text{cara}\} = 0,3, P_2(B) = P_2\{\text{coroa}\} = 0,7$$

e $P_2(S) = 1$. Verifique que as três condições da definição de probabilidade são satisfeitas.

É claro que se desejamos que a probabilidade traduza nossa confiança na capacidade do evento ocorrer, P_1 constitui um modelo adequado quando acreditamos ser o resultado cara tão provável quanto o resultado coroa. P_2, por sua vez seria mais adequado se tivéssemos lançado a moeda um número grande de vezes e obtido o resultado cara em 30% dos lançamentos.

Encerrando o exemplo, um breve comentário a respeito de notação. Deveríamos ter escrito $P(\{\text{cara}\})$ e não $P\{\text{cara}\}$. Entretanto, quando não houver risco de confusão daremos preferência à notação mais simples. □

Os modelos probabilísticos que usamos mais freqüentemente são exatamente os apresentados no exemplo anterior.

Um é o modelo equiprobabilístico. Se temos n elementos no espaço amostral e queremos que todos os eventos unitários tenham a mesma probabilidade, devemos atribuir a cada evento unitário a probabilidade $\frac{1}{n}\cdot$ Não poderia ser de outra forma pois se $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = k$, temos, por iii),

$$\begin{aligned} 1 = P(S) = P\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} &= P(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}) \\ &= P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + \cdots + P(\{x_n\}) \\ &= k + k + \cdots + k = nk \quad \text{e} \quad k = \frac{1}{n}\cdot \end{aligned}$$

Analogamente, é fácil ver que, nesse modelo, se um evento X formado por j elementos então $P(X) = \frac{j}{n}\cdot$ Ou seja, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis. Foi esse o modelo adotado por vários matemáticos como Cardano[1], Pascal e Laplace[2] entre outros, no estudo dos jogos de azar.

[1] Cardano, Jerônimo (1501-1576), matemático italiano.

[2] Laplace, Pierre Simon (1749-1827), matemátrico francês.

Outro é o modelo freqüencial. Se repetimos a experiência n vezes e o evento A ocorreu em j dessas experiências, adotamos para $P(A)$ a freqüência relativa do evento A, isto é, o número de vezes que o evento A ocorreu dividido pelo número total de repetições da experiência, ou seja, $P(A) = \frac{j}{n}\cdot$ □

O teorema a seguir contém as propriedades das probabilidades.

Teorema 1 . Se A e B são eventos, então:

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ii) $P(\varnothing) = 0$.

iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) Se $A \supset B$ então $P(A) \geqslant P(B)$.

Prova. i) $1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Daí, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ii) $P(S) = P(S \cup \varnothing) = P(S) + P(\varnothing)$, pois S e $\varnothing$ são mutuamente excludentes. Daí, $P(\varnothing) = 0$.

iii) $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B)$ pois $A - B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes. Daí, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B)$ pois $A - B$ e B são mutuamente excludentes. Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, resulta $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, se $A \supset B$ resulta $P(A - B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A - B) \geqslant 0$, temos $P(A) \geqslant P(B)$. □

Exemplo 5. Em um grupo de r pessoas, qual é a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia?

Solução. Vamos determinar a probabilidade disso não acontecer. O número de casos possíveis para os aniversários das r pessoas é 365^r. O número de casos favoráveis a que todas aniversariem em dias diferentes é $365 \times 364 \times \cdots \times (366 - r)$, havendo r fatores nesse produto. Portanto, a probabilidade de não haver pelo menos duas

pessoas que façam aniversário no mesmo dia é de

$$\frac{365 \times 364 \times \cdots \times (366 - r)}{365^r}$$

e a de haver pelo menos duas pessoas que tenham o mesmo dia de aniversário é de

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (366 - r)}{365^r}.$$

A tabela abaixo dá, para alguns valores de r, a probabilidade de haver coincidência de aniversários.

r	Probabilidade
5	0,03
10	0,12
15	0,25
20	0,41
23	0,51
25	0,57
30	0,71
40	0,89
45	0,94
50	0,97

O resultado é surpreendente. Em um grupo de 23 pessoas, é mais provável haver duas pessoas com o mesmo aniversário do que todas aniversariarem em dias diferentes. □

Exemplo 6. Em uma loteria de N números há um só prêmio. Salvador compra n $(1 < n < N)$ bilhetes para uma só extração e

Sílvio compra n bilhetes, um para cada uma de n extrações. Qual dos dois jogadores tem mais chance de ganhar algum prêmio?

Solução. A probabilidade de Salvador ganhar algum prêmio é

$$\frac{n}{N}.$$

A probabilidade de Sílvio não ganhar nenhum prêmio é

$$\frac{(N-1)^n}{N^n}.$$

Logo, a probabilidade de Sílvio ganhar algum prêmio é

$$1-\frac{(N-1)^n}{N^n}.$$

Afirmamos que Salvador tem mais chance de ser premiado, isto é, afirmamos que

$$\frac{n}{N} > 1-\frac{(N-1)^n}{N^n},$$

ou, equivalentemente, afirmamos que

$$\frac{(N-1)^n}{N^n} > 1-\frac{n}{N}.$$

A prova dessa afirmação faz-se por indução.
Para $n=2$ temos

$$\frac{(N-1)^n}{N^n} = \frac{(N-1)^2}{N^2} = 1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2} > 1-\frac{2}{N} = 1-\frac{n}{N}.$$

Se

$$\frac{(N-1)^n}{N^n} > 1-\frac{n}{N}$$

multiplicando por

$$\frac{N-1}{N}$$

obtemos

$$\frac{(N-1)^{n+1}}{N^{n+1}} > 1-\frac{n}{N}-\frac{1}{N}+\frac{n}{N^2} > 1-\frac{n+1}{N}, \qquad \text{cqd.} \qquad \square$$

Exercícios

1. Lançam-se dois dados não-tendenciosos. Qual a probabilidade da soma dos pontos ser igual a 7?

2. 24 times são divididos em dois grupos de 12 times cada. Qual é a probabilidade de dois desses times ficarem no mesmo grupo?

3. Mostre que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

4. Se $P(A) = \frac{2}{3}$ e $P(B) = \frac{4}{9}$, mostre que:

a) $P(A \cup B) \geqslant \frac{2}{3}$.
b) $\frac{2}{9} \leqslant P(A \cap \overline{B}) \leqslant \frac{5}{9}$.
c) $\frac{1}{9} \leqslant P(A \cap B) \leqslant \frac{4}{9}$.

5. Cinco dados são jogados simultaneamente. Determine a probabilidade de se obter:

a) um par.
b) dois pares.
c) uma trinca.
d) uma quadra.
e) uma quina.
f) uma seqüência.
g) um "ful hand", isto é, uma trinca e um par.

6. Um polígono regular de $2n + 1$ lados está inscrito em um círculo. Escolhem-se três dos seus vértices, formando um triângulo. Determine a probabilidade do centro do círculo ser interior ao triângulo.

7. Doze pessoas são divididas em três grupos de 4. Qual é a probabilidade de duas determinadas dessas pessoas ficarem no mesmo grupo?

8. Em um grupo de 4 pessoas, qual é a probabilidade de haver alguma coincidência de signos zodiacais?

9. Em um armário há 5 pares de sapatos. Escolhem-se 4 pés de sapatos. Qual é a probabilidade de se formar exatamente um par de sapatos?

10. Distribuindo ao acaso 5 sorvetes de creme e 5 de chocolate a 10 pessoas, das quais 3 preferem creme, 2 preferem chocolate e as demais não têm preferência, qual é a probabilidade de todas saírem satisfeitas?

11. Escolhem-se ao acaso duas peças de um dominó comum. Qual é a probabilidade delas possuírem um número comum?

12. No jogo da quina concorrem 80 dezenas e são sorteadas 5 dezenas. Clara apostou em 8 dezenas. Qual a probabilidade de Clara acertar:

a) 3 dezenas?
b) 4 dezenas?
c) 5 dezenas?

13. Em uma roda são colocadas n pessoas. Qual é a probabilidade de duas dessas pessoas ficarem juntas?

14. Uma pessoa tem um molho de n chaves, das quais apenas uma abre a porta. Se ela vai experimentando as chaves até acertar, determine a probabilidade dela só acertar na tentativa de ordem k, supondo:

a) que a cada tentativa frustrada ela toma a sábia providência de descartar a chave que não serviu.
b) supondo que ela não age como no item a).

15. Há 8 carros estacionados em 12 vagas em fila. Determine a probabilidade:

a) das vagas vazias serem consecutivas.
b) de não haver duas vagas vazias adjacentes.

16. Se $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$, $P(C) = P(A \cap B) = 0,3$, $P(A \cap C) = 0$ e $P(B \cap C) = 0,1$, determine:
a) $P(A \cup B \cup C)$.
b) $P[A - (B \cup C)]$.
c) $P[A \cap (B \cup C)]$. d) $P[(A \cap B) \cup C]$.

17. Em certa escola a probabilidade de um aluno ser torcedor do Flamento é 0,60, de assistir novela é 0,70 e de gostar de praia é 0,80. Entre que valores está compreendida a probabilidade de um aluno dessa escola, simultaneamente: a) assistir novela e gostar de praia. b) torcer pelo Flamengo.

18. Laura e Telma retiram cada uma um bilhete numerado de uma urna que contém bilhetes numerados de 1 a 100. Determine a probabilidade do número de Laura ser maior que o de Telma, supondo a extração:
a) sem reposição.
b) com reposição.

19. Em uma gaveta há 10 pilhas, das quais duas estão descarregadas. Testando-se as pilhas uma a uma até serem identificadas as duas descarregadas, determine a probabilidade de serem feitos:
a) cinco testes.
b) mais de cinco testes.
c) menos de 5 testes.

Sugestões aos Exercícios

2. Para dividí-los, basta escolher os times do primeiro grupo. Há C_{24}^{12} modos de formar o primeiro grupo. Eles podem ficar juntos no primeiro grupo de C_{22}^{10} modos e outro tanto no segundo grupo.

Uma solução mais simples é obtida começando o raciocínio depois do primeiro time ter sido colocado. Há 23 posições possíveis para o segundo time, das quais 11 são favoráveis.

3. Use $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

4. Faça um diagrama de conjuntos.

5a. O número de resultados possíveis é 6^5. Para formar um par, primeiro se deve escolher que par será (6 modos), depois quais dados formarão o par (C_5^2 modos) e finalmente os números que aparecerão nos outros dados ($5 \times 4 \times 3$ modos).

5b. Para formar dois pares, primeiro se deve escolher de que serão os pares (C_6^2 modos), depois quais dados formarão o par maior (C_5^2 modos), quais dados formarão o par menor (C_3^2 modos) e finalmente o número que aparecerá no dado restante (4 modos).

6. Os casos favoráveis nos quais o vértice 1 é escolhido são aqueles nos quais um dos vértices é j $(1 < j \leqslant n + 1)$ e o outro tem número compreendido entre $n + 2$ e $n + j$, inclusive.

7. Inspire-se no problema 2.

8. Calcule a probabilidade dos signos serem todos diferentes.

9. Há C_{10}^4 casos possíveis. Para formar um caso favorável, devemos escolher um par, depois escolher dois outros pares e, dentro de cada um desses dois pares, escolher o pé direito ou o esquerdo.

10. Para distribuir os sorvetes basta escolher quem recebe os de creme. A resposta é $\dfrac{C_5^2}{C_{10}^5}$.

11. São 28 peças. Há C_7^2 modos de tomar duas peças que tenham ambas o número seis.

12a. Devem ser sorteadas três entre as 8 dezenas jogadas e duas entre as 72 dezenas não-jogadas.

15a. Há C_{12}^4 modos de escolher as vagas vazias. Em 9 desses modos elas são consecutivas.

15b. Para formar uma fila com 8 carros e 4 espaços vazios, primeiro arrume os carros e depois entremeie os espaços vazios. Há 8! modos de arrumar os carros. Devemos em seguida escolher 4 dos 9 espaços entre os carros para botar as vagas vazias.

16. Faça um diagrama de conjuntos.

17a. Faça um diagrama de conjuntos.

17b. Faça um diagrama de conjuntos para dois conjuntos: o primeiro, formado pelos que assistem novela e gostam de praia; o segundo, pelos que torcem pelo Flamengo.

18b. Conte os casos em que elas empatam. Dos restantes, em uma metade Laura ganha e na outra metade Telma ganha.

19a. Nos quatro primeiros testes deve aparecer uma das pilhas descarregadas e a outra deve aparecer no quinto teste.

19b. O número de pilhas descarregadas nos cinco primeiros testes deve ser no máximo igual a 1.

19c. Nos quatro primeiros testes devem aparecer as duas pilhas descarregadas.

5.2 Probabilidade Condicional

Exemplo 1. Consideremos a experiência que consiste em jogar um dado não-viciado e observar a face de cima. Consideremos o evento $B = \{\text{o resultado é par}\}$. Temos $P(B) = \frac{3}{6} = 0,5$. Essa é a probabilidade de B *a priori*, isto é, antes que a experiência se realize. Suponhamos que, realizada a experiência, alguém nos informe que o resultado não foi o número 1, isto é, que $A = \{\text{o resultado é diferente de } 1\}$ ocorreu.

Nossa opinião sobre a ocorrência de B se modifica com essa informação pois passamos a ter apenas 5 casos possíveis, dos quais 3 são favoráveis à ocorrência de B. Essa opinião é quantificada com a introdução de uma probabilidade *a posteriori*, ou probabilidade de B na certeza de A,

$$P(B \mid A) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Note que os casos possíveis não são mais todos os elementos do espaço amostral S e sim os elementos de A e que os casos favoráveis à ocorrência de B não são mais todos os elementos de B e sim os elementos de $A \cap B$ pois só os elementos que pertencem a A podem ocorrer. □

Exemplo 2. A tabela abaixo dá a distribuição dos alunos de uma turma, por sexo e por carreira pretendida.

	masculino	feminino	total
científica	15	5	20
humanística	3	7	10
total	18	12	30

Escolhe-se ao acaso um aluno. Sejam M, F, C e H os eventos, o aluno selecionado é do sexo masculino, é do sexo feminino, pretende uma carreira científica e pretende uma carreira humanística, respectivamente. Temos

$$P(H) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3};$$
$$P(H \mid M) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6};$$
$$P(H \mid F) = \frac{7}{12};$$
$$P(F \mid H) = \frac{7}{10}. \qquad \square$$

Definição. Dados dois eventos A e B, com $P(A) \neq 0$, a *probabilidade condicional* de B na certeza de A é o número

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Na realidade, poucas vezes usaremos a fórmula acima para calcular uma probabilidade condicional. Usá-la-emos, isto sim, para o cálculo de $P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. $\square$

Exemplo 3. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de ambas serem brancas.

Solução. Sejam $B_1 = \{\text{a primeira bola é branca}\}$ e $B_2 = \{\text{a segunda bola é branca}\}$. Temos

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot B(B_2 \mid B_1) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15} \cdot$$

Note que foi bastante simples o cálculo de $P(B_2 \mid B_1)$. Realmente, na certeza de que a primeira bola foi branca, é fácil calcular a probabilidade da segunda bola ser branca, pois, para a segunda extração, a urna está com 3 bolas brancas e 6 pretas. De modo mais geral, é fácil calcular probabilidades condicionais quando as coisas estão na ordem certa, isto é, é fácil calcular probabilidades de coisas futuras na certeza de coisas passadas. □

Exemplo 4. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade da primeira bola ser branca sabendo que a segunda bola é branca.

Solução. Sejam $B_1 = \{\text{a primeira bola é branca}\}$ e $B_2 = \{\text{a segunda bola é branca}\}$. Queremos $P(B_1 \mid B_2)$. Note que essa é uma probabilidade do passado na certeza do futuro. Aqui usamos a fórmula da definição de probabilidade condicional.

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} \cdot$$

$P(B_1 \cap B_2)$ foi calculada no exemplo anterior e vale $\frac{2}{15} \cdot$

O cálculo de $P(B_2)$ não é imediato pois não sabemos como está a urna no momento da segunda extração. Para calcular $P(B_2)$, consideramos todas as possibilidades quanto à primeira bola. Para a segunda bola ser branca, ou a segunda é branca e a primeira foi

branca, ou a segunda é branca e a primeira foi preta. Isto é,

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P[(B_1 \cap B_2) \cup (P_1 \cap B_2)] \\
&= P(B_1 \cap B_2) + P(P_1 \cap B_2) \\
&= \frac{2}{15} + P(P_1) \cdot P(B_2 \mid P_1) \\
&= \frac{2}{15} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{2}{15} \div \frac{2}{5} = \frac{1}{3}.$$

Uma maneira eficiente de lidar com experiências que possuem vários estágios é o uso das árvores de probabilidade.

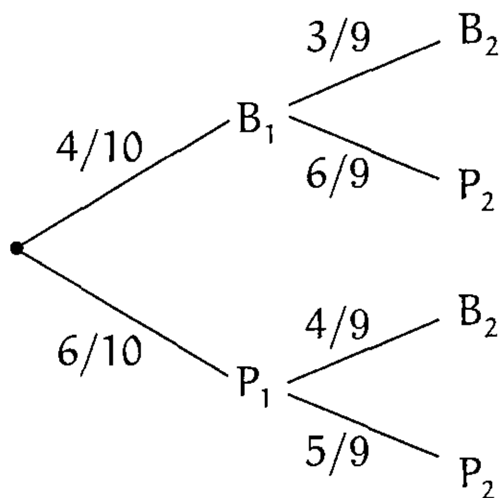


Figura 5.1

Nesses diagramas colocamos as probabilidades condicionais da extremidade de cada galho na certeza da origem do galho. Para determinar uma probabilidade usando esse diagrama, basta percorrer todos os caminhos que levam ao evento cuja probabilidade é procurada, multiplicando as probabilidades em cada caminho e somando os produtos ao longo dos vários caminhos. Assim, por

exemplo,

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15};$$

$$P(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{5}. \qquad \square$$

Exemplo 5. Escolhe-se uma entre três moedas. Duas dessas moedas são não-viciadas e a outra tem duas caras. A moeda selecionada é lançada e é obtida uma cara. Qual é a probabilidade de ter sido selecionada a moeda de duas caras?

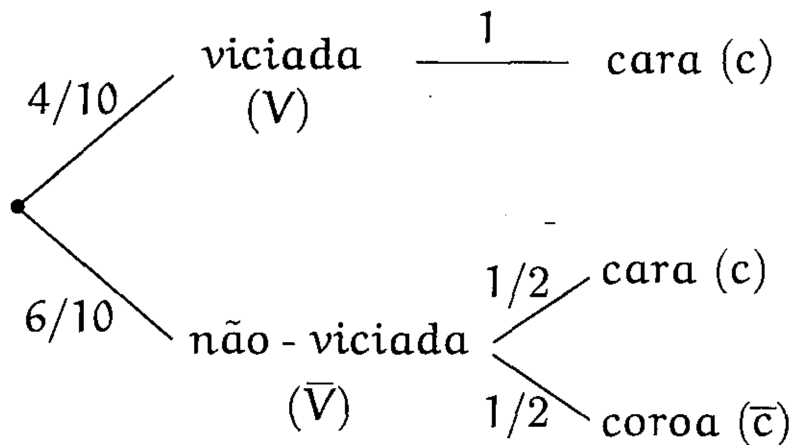


Figura 5.2

$$P(V \mid C) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)}.$$

$$P(V \cap C) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

$$P(C) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

$$P(V \mid C) = \frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

O exemplo a seguir mostra um dos mais poderosos métodos de estimação em Estatística, o método da máxima verossimilhança.

Exemplo 6. Em certa cidade, os táxis são numerados de 1 a N. Para estimar o número N de táxis da cidade, um turista anotou

os números de todos os táxis que pegou: 47, 12, 33 e 25. Determine a probabilidade do turista ter tomado os táxis que têm esses números e determine o valor de N para o qual essa probabilidade é máxima.

Solução. Sejam A = {o primeiro táxi tem número 47}, B = {o segundo táxi tem número 12}, etc. A probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} &P(A \cap B \cap C \cap D) \\ &= P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P[C \mid (A \cap B)] \cdot P[D \mid (A \cap B \cap C)] \\ &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N^4}. \end{aligned}$$

Essa probabilidade de ocorrer o que efetivamente ocorreu é chamada de verossimilhança. No caso, ela é máxima quando N é mínimo. Ora, como $N \geqslant 47$, o valor de N que torna máxima a verossimilhança é 47.

A estimativa de máxima verossimilhança de N é 47. □

Exemplo 7. Algumas pesquisas estatísticas podem causar constrangimentos aos entrevistados com perguntas do tipo "você usa drogas?" e correm o risco de não obter respostas sinceras ou não obter respostas de espécie alguma. Para estimar a proporção p de usuários de drogas em certa comunidade, pede-se ao entrevistado que, longe das vistas do entrevistador, jogue uma moeda: se o resultado for cara, responda a "você usa drogas?" e, se o resultado for coroa, responda a "sua idade é um número par?". Assim, caso o entrevistado diga sim, o entrevistador não saberá se ele é um usuário de drogas ou se apenas tem idade par.

Se s é a probabilidade de um entrevistado responder sim, s é facilmente estimado pela proporção de respostas sim obtidas nas entrevistas. A relação entre s e p pode ser determinada pela árvore abaixo.

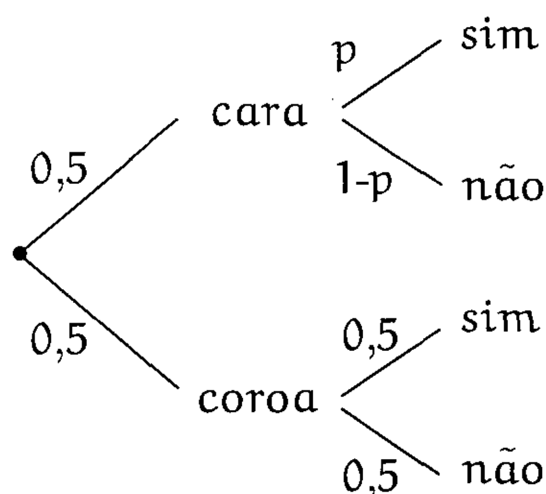


Figura 5.3

$$s = P(\text{sim}) = 0,5p + 0,5 \cdot 0,5.$$

Daí, $p = 2s - 0,5$.

Por exemplo, se 30% dos entrevistados respondem sim, você pode estimar em 10% a proporção de usuários de drogas. □

O exemplo a seguir é um interessante exemplo de probabilidade geométrica. Quando selecionamos um ponto ao acaso em uma parte do plano é extremamente razoável supor que a probabilidade do ponto selecionado pertencer a uma certa região seja proporcional à área dessa região.

Exemplo 8. Selecionam-se ao acaso dois pontos em um segmento de tamanho 1, dividindo-o em três partes. Determine a probabilidade de que se possa formar um triângulo com essas três partes.

Solução. Sejam $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$ os pontos escolhidos, $x \leqslant y$.

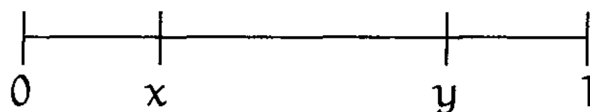


Figura 5.4

Escolher x e y pertencentes a $[0,1]$, com $x \leqslant y$, equivale a escolher um ponto (x, y) no triângulo T da figura abaixo.

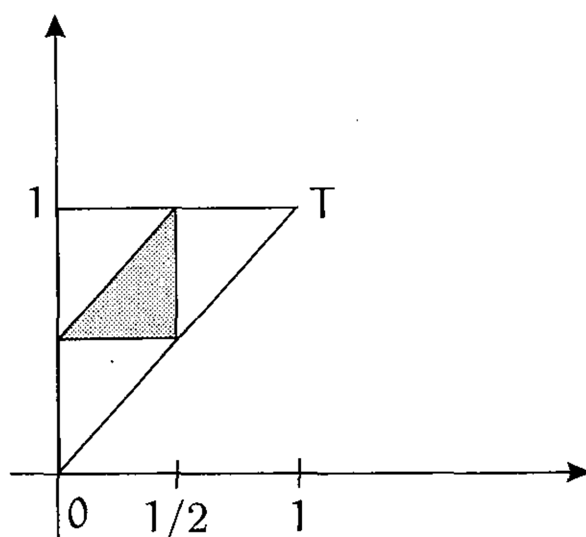


Figura 5.5

Para que exista um triângulo de lados x, $y - x$ e $1 - y$ devemos ter $x < y - x + 1 - y$ e $y - x < x + 1 - y$ e $1 - y < x + y - x$, o que dá $x < 0,5$ e $y < x + 0,5$ e $y > 0,5$. Em suma, o triângulo existirá se e somente se o ponto (x, y) for selecionado na parte sombreada do triângulo T.

Sendo A o evento "as três partes formam um triângulo" e sendo S o evento certo, temos que $P(A)$ é proporcional à área da parte sombreada e $P(S) = 1$ é proporcional à área de T. Logo,

$$P(A) = \frac{P(A)}{P(S)} = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área de T}} = \frac{1}{4}. \qquad \square$$

Exemplo 9. A e B lançam sucessivamente um par de dados até que um deles obtenha soma de pontos 7, caso em que a disputa termina e o vencedor é o jogador que obteve soma 7. Se A é o primeiro a jogar, qual é a probabilidade de A ser o vencedor?

Solução. A probabilidade de obter soma 7 é

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

e a de não obter soma 7 é

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Para A ganhar, ou A ganha na primeira mão, ou na segunda, ou na terceira, etc. A probabilidade de A ganhar na primeira mão é $\frac{1}{6}$. Para A ganhar na segunda mão, A não pode obter soma 7 na primeira mão e B não pode obter soma 7 na primeira mão e A deve obtere soma 7 na segunda mão, o que ocorre com probabilidade

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

Para A ganhar na terceira mão, A não pode obter soma 7 nas duas primeiras mãos e B não pode obter soma 7 nas duas primeiras mãos e A deve obter soma 7 na terceira mão, o que ocorre com probabilidade

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6},$$

etc.

A probabilidade de A ganhar é

$$\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} + \cdots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11}.$$

Uma solução mais elegante pode ser obtida ignorando as mãos sem vencedores. A probabilidade de A ganhar uma mão é de $\frac{1}{6}$; a de B ganhar uma mão é de

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

pois, para B ganhar, A não pode obter soma 7 e B deve obter soma 7; a de ninguém ganhar é de

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36},$$

pois, para que ninguém ganhe, A não pode obter soma 7 e B não pode obter soma 7.

A probabilidade A ganhar é a probabilidade A ganhar em uma mão em que houve vencedor, isto é,

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}.$$

Como, analogamente,

$$P(A \mid A \cup B) = \frac{P(B)}{P(A \cup B)},$$

observe que a razão entre $P(A \mid A \cup B)$ e $P(B \mid A \cup B)$ é igual à razão entre $P(A)$ e $P(B)$, pois $P(A \cup B)$ é simplificado. Esse é o princípio de preservação das chances relativas. Em um jogo em que pode haver empates, e é repetido até que alguém vença, a razão entre as probabilidades de vitória dos dois jogadores é igual à razão de suas probabilidades de vitória em uma única partida.

Conhecendo o princípio, poderíamos ter resolvido o problema do modo seguinte:

Em uma mão, as probabilidades de vitória de A e de B são respectivamente de

$$\frac{1}{6} \quad \text{e de} \quad \frac{5}{36}.$$

A razão dessas probabilidades é de $\frac{6}{5}$. A razão das probabilidades de vitória de A e de B no jogo é também de $\frac{6}{5}$ e, como um dos dois ganha o jogo, a soma dessas probabilidades é 1. Então, essas probabilidades são iguais a $\frac{6}{11}$ e $\frac{5}{11}$, respectivamente. □

Exercícios

1. Joga-se um dado não-viciado duas vezes. Determine a probabilidade condicional de obter 3 na primeira jogada sabendo que a soma dos resultados foi 7.

2. Um estudante resolve um teste de múltipla escolha de 10 questões, com 5 alternativas por questão. Ele sabe 60% da matéria

do teste. Quando ele sabe uma questão, ele acerta, e, quando não sabe, escolhe a resposta ao acaso. Se ele acerta uma questão, qual é a probabilidade de que tenha sido por acaso?

3. Dois eventos A e B são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Três eventos A, B e C são independentes, por definição, quando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Jogue um dado duas vezes. Considere os eventos A = {o resultado do primeiro lançamento é par}, B = {o resultado do segundo lançamento é par} e C = {a soma dos resultados é par}.

a) A e B são independentes?
b) A e C são independentes?
c) B e C são independentes?
d) A, B e C são independentes?

4. Determine a probabilidade de obter ao menos:

a) um seis em 4 lançamentos de um dado.
b) um duplo seis em 24 lançamentos de um par de dados.

5. Um exame de laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma doença quando ela de fato existe. Entretanto o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% das pessoas sadias testadas. Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença, dado que o seu exame foi positivo?

6. Quantas vezes, no mínimo, se deve lançar um dado para que a probabilidade de obter algum seis seja superior a 0,9?

7. Em uma cidade com $n + 1$ habitantes, uma pessoa conta um boato para outra pessoa, a qual, por sua vez, conta o boato para uma terceira pessoa, e assim por diante. Evidentemente ninguém é distraído a ponto de contar o boato para quem lhe havia contado o boato. Determine a probabilidade do boato ser contado k vezes:

a) sem retornar ao inventor do boato.
b) sem repetir nenhuma pessoa.

8. Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade $\frac{1}{3}$ · Suponha que A faz uma afirmação e que D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual a probabilidade de A ter falado a verdade?

9. Um prisioneiro possui 50 bolas brancas, 50 bolas pretas e duas urnas iguais. O prisioneiro deve colocar do modo que preferir as bolas nas urnas, desde que nenhuma urna fique vazia. As urnas serão embaralhadas e o prisioneiro deverá, de olhos fechados, escolher uma urna e, nesta urna, escolher uma bola. Se a bola for branca ele será libertado e, se for preta, será condenado.. Como deve agir o prisioneiro para maximizar a probabilidade de ser libertado?

10. 2^n jogadores de igual habilidade disputam um torneio. Eles são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante até restar apenas um jogador que é proclamado campeão. Qual é a probabilidade dois jogadores A e B se enfrentarem durante o torneio. Qual é a probabilidade do jogador A jogar exatamente k partidas?

11. Em um torneio como o descrito no exercício anterior, os 16 jogadores têm habilidades diferentes e não há surpresas nos resultados (se A é melhor que B, A vence B).

a) Qual é a probabilidade do segundo melhor jogador ser vice-campeão do torneio?
b) Qual é a probabilidade do quarto melhor jogador ser vice-campeão do torneio?
c) Qual é o número máximo de partidas que o décimo melhor jogador consegue disputar? Qual é a probabilidae dele disputar esse número máximo de partidas?

12. Em um programa da televisão italiana, os candidatos devem escolher uma entre três portas. Atrás de uma dessas portas há

um prêmio e atrás de cada uma das outras duas portas há um bode. Escolhida uma porta pelo candidato, o apresentador, que sabe onde estão os bodes, abre uma das outras portas, atrás da qual se encontra um bode, e pergunta ao candidato se ele quer ficar com a porta que escolheu ou se prefere trocá-la pela outra porta que ainda está fechada. Admitindo que, quando o candidato escolhe a porta em que está o prêmio, o apresentador escolha ao acaso uma porta para abrir, você acha que o candidato deve trocar, não deve trocar ou que tanto faz?

13. Qual é a probabilidade de serem obtidas exatamente 5 caras em 10 lançamentos de uma moeda não-tendenciosa?

14. Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se sucessivamente bolas dessa urna de acordo com o seguinte processo: cada vez que uma bola é sacada, ela é devolvida à urna e são acrescentadas mais duas bolas da mesma cor que ela. Determine a probabilidade de:

a) a segunda bola sacada ser branca.

b) a primeira bola sacada ter sido branca na certeza de que a segunda bola sacada foi preta.

15. Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

16. A e B disputam uma série de partidas. Ganha um prêmio quem primeiro completar 10 vitórias. A é mais habilidoso do que B, sendo de 0,6 a probabilidade de A ganhar uma partida e de 0,4 a probabilidade de B ganhar uma partida. No momento o placar está 7×4 a favor de B. Qual é a probabilidade de A ganhar o prêmio?

17. Três jogadores, A, B e C, disputam um torneio. Os três têm

probabilidades iguais de ganhar o torneio; têm também probabilidades iguais de tirarem o segundo lugar e têm probabilidades iguais de tirarem o último lugar. É necessariamente verdadeiro que cada uma das seis ordens possíveis de classificação dos três jogadores tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer? Justifique.

18. Selecionam-se ao acaso dois pontos em uma circunferência. Qual a probabilidade da corda determinada por esses pontos ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

19. Seleciona-se ao acaso um ponto X em um diâmetro AB de uma circunferência. Qual a probabilidade da corda que contém X e é perpendicular a AB ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

20. Cristina e Maria, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 16 horas. Se cada uma delas chegará ao encontro em um instante qualquer entre 16 e 17 horas e se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pela outra, qual é a probabilidade delas se encontrarem?

Sugestões aos Exercícios

1. $P(X=3 \mid X+Y=7) = \dfrac{P(X=3 \text{ e } X+Y=7)}{P(X+Y=7)} = \dfrac{P(X=3 \text{ e } Y=4)}{P(X+Y=7)}$

2. Árvore!

4a. Determine a probabilidade de não obter nenhum seis.

5. Árvore!

6. Determine a probabilidade de não obter nenhum seis.

8. Árvore!

12. Uma solução elegante é obtida observando que, na realidade, quem troca está trocando uma porta por duas. Uma solução normal é obtida construindo uma árvore.

14. Árvore!

16. A ganha o prêmio se e somente se, nas próximas 8 partidas, B ganhar no máximo duas.

18. Suponha que a probabilidade de um ponto, selecionado ao acaso, pertencer a um arco é proporcional ao comprimento do arco.

19. Suponha que a probabilidade de um ponto, selecionado ao acaso em uma reta, pertencer a um segmento é proporcional ao comprimento do segmento.

20. Contando o tempo em minutos a partir das 16 horas e sendo x e y os instantes de chegada de Cristina e de Maria, a região "possível" é

$$\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 60,\ 0 \leqslant y \leqslant 60\}$$

e a região "favorável" é $\{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 60,\ 0 \leqslant y \leqslant 60,\ |x-y| \leqslant 10\}$.

Capítulo 6

Médias e o Princípio das Gavetas

6.1 Médias

Uma idéia bastante importante é a idéia de média. Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista.

Se essa característica é a soma dos elementos da lista, obtemos a mais simples de todas as médias, a média aritmética. A *média aritmética* (simples) da lista de n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um valor $\bar{x}$ tal que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \bar{x} + \bar{x} + \cdots + \bar{x} = n\bar{x}$. Portanto, a média aritmética (simples) da lista de n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Por exemplo, a média aritmética dos números 3, 36 e 54 é

$$\frac{3 + 36 + 54}{3} = 31. \qquad \square$$

Se a característica a ser considerada for o produto dos elementos da lista, obteremos a média geométrica. A *média geométrica* (simples) dos n números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é um valor positivo g tal que $x_1 x_2 \dots x_n = g \cdot g \dots g = g^n$. Portanto, a média geométrica (simples) dos n números positivos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por

$$g = G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Observe que só definimos a média geométrica para números positivos. Assim evitamos a possibilidade da média não existir (por exemplo, qual seria a média geométrica entre 2 e -2?).

Por exemplo, a média geométrica dos números 3, 36 e 54 é $\sqrt[3]{3 \cdot 36 \cdot 54} = 18$. □

Se a característica for a soma dos inversos dos elementos da lista, obteremos a média harmônica. A *média harmônica* (simples) dos n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um valor h tal que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \cdots + \frac{1}{h} = \frac{n}{h}.$$

Portanto, a média harmônica (simples) dos n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é definida por

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

A média harmônica é, pois, o inverso da média aritmética dos inversos dos números.

Por exemplo, a média harmônica dos números 3, 36 e 54 é

$$\frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{36} + \frac{1}{54}} = \frac{3}{\frac{36+3+2}{108}} = \frac{3 \times 108}{41} = \frac{324}{41} \cong 7,9.$$

Observe que só definimos a média harmônica para números positivos. Assim evitamos a possibilidade da média não existir (por exemplo, qual seria a média harmônica entre 2 e −2?). □

Exemplo 1. Uma empresa produziu, durante o primeiro trimestre do ano passado, 500, 200 e 200 unidades, em janeiro, fevereiro e março, respectivamente. Qual foi a produção média mensal nesse trimestre?

Comentário. Resista à tentação de tirar rapidamente a média aritmética e ponto final. Você sempre corre o risco de um aluno perguntar porque não podia ter tirado a média geométrica.

Solução. Que média é essa que queremos?
Queremos uma média M tal que, se a produção mensal fosse sempre igual a M, a produção trimestral seria a mesma. A produção trimestral foi de $500 + 200 + 200$. Se em todos os meses a produção

fosse igual a M, a produção trimestral seria igual a 3M. Logo, $3M = 500 + 200 + 200$ e

$$M = \frac{500 + 200 + 200}{3} = 300.$$

A média desejada era a média aritmética.
Resposta: 300. □

Exemplo 2. Uma empresa aumentou sua produção durante o primeiro bimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento foram de 21% e 8%, respectivamente. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre?

Comentário. A resposta não é $(21\% + 8\%) \div 2 = 14,5\%$.

Solução. Que média queremos?
Queremos uma taxa média i tal que, se em todos os meses a taxa de aumento fosse igual a i, o aumento bimestral seria o mesmo.
O aumento bimestral foi de 30,68%, conforme mostra o esquema

$$100 \longmapsto 100 \cdot 1,21 \longmapsto 100 \cdot 1,21 \cdot 1,08 = 130,68.$$

Se em todos os meses tivéssemos um aumento de taxa i, teríamos

$$100 \longmapsto 100(1+i) \longmapsto 100(1+i)^2.$$

Então,

$$\begin{aligned} 100(1+i)^2 &= 100 \cdot 1,21 \cdot 1,08 \\ (1+i)^2 &= 1,21 \cdot 1,08 \\ 1+i &= \sqrt{1,21 \cdot 1,08} \cong 1,1432 \\ i &\cong 0,1432 = 14,32\%. \end{aligned}$$

A média procurada era uma média geométrica. Mais precisamente: a taxa média, aumentada de uma unidade, é a média geométrica das taxas mensais aumentadas de uma unidade. □

Exemplo 3. Um concurso anual distribui igualmente entre os vencedores um prêmio total de R$ 1 800,00. Nos últimos três anos

houve 2, 1 e 3 premiados, respectivamente. Qual foi o prêmio médio desses ganhadores?

Comentário. Embora o número médio de ganhadores tenha sido igual a 2, o prêmio médio não foi de R$ 1 800,00 ÷ 2 = R$ 900,00.

Solução. Queremos uma média tal que, se todos os prêmios fossem iguais a essa média, o total distribuído seria o mesmo. Essa é precisamente a média aritmética. Os prêmios foram de $1800 \div 2 = 900$, $1800 \div 1 = 1800$ e $1800 \div 3 = 600$. O prêmio médio foi de $(900 + 1800 + 600) \div 3 = 1100$ reais.

Observe que a média aritmética dos rateios é igual a

$$\frac{1800 \times \frac{1}{2} + 1800 \times \frac{1}{1} + 1800 \times \frac{1}{3}}{3}$$

$$= 1800 \times \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}}{3}$$

$$= 1800 + \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}}$$

e que

$$\frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}}$$

é a média harmônica dos números de ganhadores.

O rateio médio é o rateio que corresponderia a uma quantidade de ganhadores igual à média harmônica dos números de ganhadores. □

Outra média importante é a média quadrática. A *média quadrática* dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é definida por

$$q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}},$$

isto é, a média quadrática é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos números. Por exemplo, a média quadrática dos números 1 e 7 é

$$\sqrt{\frac{1^2 + 7^2}{2}} = 5. \qquad \square$$

Exemplo 4. A qualidade de uma aproximação é medida pelo seu erro, que é a diferença entre o valor da aproximação e o valor real da grandeza. Por exemplo, 4 é uma aproximação de 3,8 com erro de 0,2 (também se diz uma aproximação de 3,8 por excesso, com erro de 0,2) e 5,5 é uma aproximação de 5,7 com erro de $-0,2$ (ou uma aproximação de 5,7 por falta, com erro de 0,2). Evidentemente, quanto mais próximo de zero estiver o erro, tanto melhor será a aproximação. Assim, por exemplo, 39 é uma aproximação de 40 (erro igual a -1) que é melhor do que a aproximação 42 (erro igual a 2).

Mede-se a qualidade de uma lista de aproximações pela média quadrática dos seus erros. Também se usa o *erro médio quadrático*, que é o quadrado dessa média quadrática, ou seja, é a média aritmética dos quadrados dos erros. Abaixo temos duas listas de aproximações do número 4:

$$S_1 : 3; \quad 4,5; \quad 3,6 \qquad\qquad S_2 : 3,2; \quad 4,8$$

Os erros médios quadráticos são respectivamente iguais a

$$\frac{1^2 + 0,5^2 + 0,4^2}{3} = 0,47 \quad \text{e} \quad \frac{0,8^2 + 0,8^2}{2} = 0,64.$$

S_1 é uma lista de aproximações de 4 que é melhor do que S_2. □

Uma importante propriedade da média aritmética é:
Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é igual a $\bar{x}$, pelo menos um dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é maior que ou igual a $\bar{x}$.
Com efeito, se fosse $x_1 < \bar{x}, x_2 < \bar{x}, \dots, x_n < \bar{x}$, teríamos

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < n\bar{x}, \ \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} < \bar{x}, \ \bar{x} < \bar{x},$$

o que é absurdo. □

Exemplo 5. Mostre que, em um grupo de 50 pessoas, há sempre pelo menos 5 que nasceram no mesmo mês.

Solução. O número médio de pessoas por mês é $50 \div 12 = 4,1\dots$. Logo, em algum mês o número de nascidos nesse mês (que é um

inteiro) é maior que ou igual a 4,1..., ou seja, é maior que ou igual a 5. □

Uma conseqüência imediata do exemplo 5 é o **Princípio das Gavetas de Dirichlet**[1]:

Exemplo 6. (Princípio das Gavetas) Se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

Prova. O número médio de objetos por gaveta é maior que ou igual a $\frac{n+1}{n}$, que é maior que 1. Logo, em alguma gaveta haverá um número de objetos maior que 1. □

Exemplo 7. Mostre que todo inteiro positivo n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 1.

Solução. Considere os $n+1$ primeiros números da seqüência 1, 11, 111,.... Divida-os por n e considere os restos dessas divisões. Esses restos só podem ser iguais a $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Pensando nos números como objetos e nos restos como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, há dois números na seqüência que dão o mesmo resto quando divididos por n, digamos $11\ldots1$ (p algarismos) e $11\ldots1$ (q algarismos), $p < q$. A diferença desses números é um múltiplo de n e se escreve $11\ldots10\ldots0$, com p algarismos 0 e $q-p$ algarismos 1. □

Exemplo 8. Cinco pontos são tomados sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é menor que ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução. Divida o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, ligando os pontos médios dos lados postos. Pensando nos pontos como objetos e nos quadrados como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, haverá dois pontos

[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemão.

no mesmo quadrado de lado 1. A distância entre esses pontos é no máximo igual ao comprimento da diagonal do quadrado, que é $\sqrt{2}$. □

Exemplo 9. Um enxadrista, durante 11 semanas, joga pelos menos uma partida por dia mas não joga mais de 12 partidas por semana. Mostre que é possível achar um conjunto de dias consecutivos durante os quais ele jogou exatamente 20 partidas.

Solução. Em 11 semanas temos 77 dias. Chamemos de S_k, $k = 1, 2, \ldots, 77$, o número de partidas jogadas desde o primeiro até o k-ésimo dia, inclusive. Como ele joga pelo menos uma partida por dia, temos $1 \leqslant S_1 < S_2 < \cdots < S_{77}$. Além disso, $S_{77} \leqslant 132$ pois ele não joga mais de 12 partidas por semana.

Definindo $S_0 = 0$, a quantidade de partidas jogadas do dia p ao dia q, inclusive, é igual a $S_q - S_{p-1}$. Queremos mostrar que é possível determinar p e q de modo que $S_q - S_{p-1} = 20$.

Considere os 154 números

$$S_1, S_2, \ldots, S_{77}, S_1 + 20, S_2 + 20, \ldots, S_{77} + 20.$$

Eles pertencem a $\{1, 2, \ldots, 152\}$. O Princípio das Gavetas assegura que dois desses números são iguais. Como $S_1 < S_2 < \cdots < S_{77}$, os números iguais devem estar em metades diferentes dessa lista de 154 números. Então existem m e n tais que $S_m = S_n + 20$. O enxadrista joga 20 partidas entre os dias $n + 1$ e m, inclusive. □

Finalmente, definimos médias ponderadas. A média aritmética ponderada dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com pesos respectivamene iguais a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ é definida por

$$\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

Embora a idéia primitiva seja que a média aritmética ponderada é uma média aritmética simples de uma lista de números dos quais p_1 são iguais a x_1, p_2 são iguais a $x_2, \ldots, p_n$ são iguais a x_n, não há problema em considerar pesos não inteiros.

Aliás, é bastante útil trabalhar com pesos relativos e considerar a *média aritmética ponderada* dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com pesos iguais a $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente, como sendo

$$\frac{p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} x_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} x_2 + \cdots + \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} x_n .$$

Assim, uma média aritmética ponderada dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma expressão da forma $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$, onde

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1. \qquad \square$$

Exemplo 10. Em um grupo de pessoas, 70% das pessoas são adultos e 30% são crianças. O peso médio dos adultos é 70kg e o peso médio das crianças é de 40kg. Qual o peso médio do grupo?

Solução. É a média aritmética ponderada dos dois subgrupos, com pesos relativos de 0,7 e 0,3.
A resposta é $0,7 \times 70 + 0,3 \times 40 = 61$kg. $\square$

Exercícios

1. Um carro percorre metade de certa distância d com velocidade v_1 e percorre a outra metade com velocidade v_2. Qual a sua velocidade média?

2. Um carro tem velocidade v_1 durante metade do tempo t de percurso e tem velocidade v_2 durante a outra metade do tempo. Qual a sua velocidade média?

3. A população de um país cresceu 44% em uma década e cresceu 21% na década seguinte. Qual é, aproximadamente, a taxa média decenal de crescimento nesses 20 anos?

4. No problema anterior, qual a taxa média anual de crescimento nesses 20 anos?

5. A valorização mensal das ações de certa empresa nos quatro primeiros meses do ano foi de +25%, +25%, −25% e −25%. Qual a valorização total e qual a valorização média mensal nesse quadrimestre?

6. Em uma cela há três túneis. Um conduz à liberdade em 3 horas; outro, em 5 horas, e o último conduz ao ponto de partida depois de 9 horas. Qual o tempo médio que os prisioneiros que descobrem os túneis gastam para escapar?

7. Suponha que, no problema anterior, os prisioneiros que entram pelo terceiro túnel, quando voltam ao ponto de partida, não se lembram de qual foi o túnel em que entraram e, portanto, escolhem para a próxima tentativa um entre os três túneis.

8. Prove que a média aritmética $\bar{x}$ de uma lista de números satisfaz $m \leqslant \bar{x} \leqslant M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.

9. Prove que a média geométrica g de uma lista de n números positivos satisfaz $m \leqslant g \leqslant M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.

10. Prove que a média harmônica h de uma lista de n números positivos satisfaz $m \leqslant h \leqslant M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.

11. Em um concurso, havia apenas provas de Português e Matemática. O resultado do concurso está no quadro abaixo.

Candidato	Port.	Mat.	Classificação
João	5	7	2º
Pedro	6	4	1º
José	2	5	4º
Paulo	4	1	3º

João achou que havia erro na classificação porque fizera mais pontos que Pedro e classificara-se atrás dele. Houve necessariamente erro na classificação?

12. Pneus novos duram 40 000 km, quando usados nas rodas dianteiras, e duram 60 000 km, quando usados nas rodas traseiras.

a) Com 4 pneus novos e fazendo um rodízio adequado entre eles, quantos quilômetros um carro pode rodar? Como?

b) E com 5 pneus novos? Como?

c) A resposta do item a) é uma média entre 40 000 km e 60 000 km. Qual?

13. A média aritmética de 50 números é 40. Se dois desses números, 125 e 75, forem suprimidos, qual será a média aritmética dos números restantes?

14. Qual a característica conservada pela média quadrática?

15. Prove que a média quadrática q de uma lista de n números positivos satisfaz $m \leqslant q \leqslant M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.

16. Prove que, para dois números positivos x_1 e x_2, suas médias aritmética A, geométrica G, harmônica H e quadrática Q, satisfazem $H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$. Prove também que duas quaisquer dessas médias são iguais se e somente se $x_1 = x_2$.

17. Qual seria o problema de se medir a qualidade de uma lista de aproximações pela média aritmética dos erros?

18. Para determinar uma grandeza desconhecida x, foram feitas várias medições. Os resultados obtidos foram $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Determine a estimativa de x para a qual o erro médio quadrático é mínimo.

19. Para determinar uma grandeza desconhecida x, foram feitas várias medições. Os resultados obtidos foram $x_1, x_1, \ldots, x_n$ tais que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Determine a estimativa de x para a qual a média dos valores absolutos dos erros é mínima.

20. Eduardo observou que o consumo de energia elétrica em sua casa estava aumentando muito. Fez então um gráfico do consumo anual, em kWh, nos últimos 5 anos, tomando 1991 como ano 0. Os valores obtidos encontram-se no quadro abaixo e Eduardo achou que o gráfico parecia-se com uma reta.

ANO	(x)	0	1	2	3	4
CONSUMO	(y)	820	1000	1200	1350	1550

É fácil ver que os pontos encontrados não são colineares, mas pode-se notar no gráfico que é possível traçar retas que passem bem perto dos cinco pontos. Mostrando o gráfico a seus amigos Augusto e Sérgio, eles sugeriram as retas $y = 170x + 850$ e $y = 180x + 800$, respectivamente, como as retas que mais se aproximariam dos pontos.

a) Mostre que os pontos realmente não são colineares.
b) Calcule os erros médios quadráticos e determine qual das duas retas mais se aproxima dos pontos.
c) Entre todas as retas do plano, qual é a que mais se aproxima dos pontos?

21. Mostre que em qualquer conjunto de 8 inteiros há sempre dois deles cuja diferença é um múltiplo de 7.

22. Em uma festa há 20 crianças sentadas em torno de uma mesa circular. Um garçom coloca diante de cada criança, sem perguntar qual a sua preferência, uma taça de sorvete. Alguns desses sorvetes são de creme e os outros são de flocos. 10 das crianças preferem creme e 10 preferem flocos. Mostre que, sem mexer nas crianças e fazendo apenas uma rotação da mesa, é possível fazer com que pelo menos 10 crianças tenham suas preferências respeitadas.

23. Mostre que em toda reunião de n pessoas há sempre duas pessoas com o mesmo número de conhecidos.

24. Mostre que existe um múltiplo de 1997 que tem todos os dígitos iguais a 1.

25. Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos 7 pessoas nascidas no mesmo mês?

26. São dados, no plano, cinco pontos de coordenadas inteiras. Mostre que, entre os dez segmentos determinados por esses pontos, pelo menos um tem como ponto médio um ponto de coordenadas inteiras.

27. Prove que se $Nk+1$ objetos são colocados em N gavetas, pelo menos uma gaveta recebe mais de k objetos.

28. 40 100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos k candidatos responderão de modo idêntico às 4 primeiras questões da prova". Determine o maior valor de k para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

29. 40 100 candidatos estão fazendo uma prova de 20 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão. Suponha que nenhum candidato deixe de responder a nenhuma questão. Considere a afirmação: "Pelo menos 4 candidatos responderão de modo idêntico às k primeiras questões da prova". Determine o maior valor de k para o qual a afirmação é certamente verdadeira.

30. Os pontos de uma reta são coloridos com 11 cores. Mostre que é possível achar dois pontos com a mesma cor tal que a distância entre eles é um número inteiro.

31. Em um campeonato cada dois times jogam entre si uma única vez. Mostre que em qualquer momento há sempre dois times que disputaram o mesmo número de partidas.

32. Sete pontos são selecionados dentro de um retângulo 3×4. Prove que há dois desses pontos tais que a distância entre eles é no máximo igual a $\sqrt{5}$.

33. Selecionam-se oito números distintos no conjunto$\{1, 2, \ldots, 15\}$. Mostre que há pelo menos três pares de números selecionados com a mesma diferença entre o maior e o menor número do par.

34. Sejam x_1 e x_2 números reais, $x_1 < x_2$.

a) Mostre que os números reais x tais que $x_1 < x < x_2$ podem ser escritos na forma $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, λ_1 e λ_2 positivos, isto é, são médias aritméticas ponderadas, com pesos positivos, de x_1 e x_2. Essa representação é única?

b) Mostre que os números reais x da forma $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, λ_1 e λ_2 positivos, pertencem a (x_1, x_2).

c) Onde estão os pontos $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda > 1$?

d) E com $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 < 0$?

35. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais, $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, $n > 2$.

a) Mostre que os números reais x tais que $x_1 < x < x_n$ podem ser escritos na forma $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ com

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1, \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$

positivos. Essa representação é única?

b) Mostre que os números reais x da forma

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, \ n > 2,$$

com $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positivo, pertencem a (x_1, x_2).

36. Em um grupo de pessoas há 30 homens e 10 mulheres. Os homens têm altura média de 1,75m e, as mulheres, de 1,67m. Qual a altura média do grupo?

Sugestões aos Exercícios

1. Os tempos gastos são $t_1 = \dfrac{d}{2v_1}$ e $t_2 = \dfrac{d}{2v_2}$.

2. As distâncias percorridas são $d_1 = v_1 \dfrac{t}{2}$ e $d_2 = v_2 \dfrac{t}{2}$.

3. $\frac{1}{3}$ dos prisioneiros escapa em 3 horas, $\frac{1}{3}$ escapa em 5 horas, $\frac{1}{6}$ escapa em $9+3$ horas e $\frac{1}{6}$ escapa em $9+5$ horas.

7. Se x é o tempo médio procurado, os prisioneiros que escolhem o terceiro túnel gastam em média, $x+9$ horas para escapar.

11. Considere a possibilidade das notas de Português e de Matemática terem pesos diferentes.

12. Se um pneu roda x mil quilômetros em uma roda dianteira e y mil quilômetros em uma roda traseira, a fração do pneu que é gasta vale $\frac{x}{40}+\frac{y}{60}$. Para conseguir a rodagem máxima, deve-se gastar inteiramente todos os pneus.

13. A soma de todos os números é $50 \times 40 = 2\,000$.

16. Calcule $A - G$ e mostra que $A - G \geqslant 0$ e que $A - G$ é igual a zero se e somente se $x_1 = x_2$. Aplique esse resultado aos inversos de x_1 e x_2. Finalmente, calcule $Q^2 - A^2$ e mostre que $Q^2 - A^2 \geqslant 0$ e que $Q^2 - A^2 = 0$ se e somente se $x_1 = x_2$. Lembre-se que $Q \geqslant 0$ e $A \geqslant 0$.

19. Faça o gráfico de $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$. Separe os casos n par e n ímpar.

20a. Mostre que, embora os aumentos de x sejam iguais, os aumentos de y não são iguais.

20b. Para cada x, considere o y da reta como uma aproximação do y observado.

20c. Sendo (x_k, y_k), $k = 0, 1, 2, 3, 4$, os pontos observados, determine a e b para que $S = \sum_{k=0}^{4} (ax_k + b - y_k)^2$ seja mínimo. Obtém-se

$$S = 30a^2 + 20ab + 5b^2 - 27\,300a - 11\,840b + 7\,337\,400.$$

$$S = 30\left(a + \frac{b}{3} - 455\right)^2 + \frac{5}{3}(b - 822)^2 + 510.$$

S é minimo quando $a + \frac{b}{3} - 455 = 0$ e $b - 822 = 0$

21. Use o Princípio das Gavetas, considerando os números como objetos e os restos de suas divisões por 7 como gavetas.

22. Há 20 posições para a mesa. Sejam x_1 o número de crianças satisfeitas na primeira posição da mesa, etc... O número total de satisfações nas 20 posições da mesa é $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}$. Esse valor, 200, pode ser calculado observando que cada uma das 20 taças, seja de creme ou de flocos, satisfaz a criança à sua frente em exatamente 10 posições da mesa. Calcule a média de $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ e use o fato de que pelo menos um dos números deve ser maior que ou igual a essa média.

23. Use o Princípio das Gavetas, considerando as n pessoas como os objetos e considerando o número de conhecidos como as gavetas. Embora haja n gavetas, pois o número de conhecidos pode variar de 0 a $n-1$, no máximo $n-1$ gavetas são usadas, porque é impossível haver ao mesmo tempo pessoas com 0 conhecido e com $n-1$ conhecidos.

24. Use o exemplo 7.

25. O maior grupo em que isso não acontece é um grupo onde haja 6 pessoas em cada mês.

26. Considere 4 gavetas: (P, P), (P, I), (I, P) e (I, I), conforme as coordenadas sejam pares ou ímpares.

27. Determine o número médio de objetos por gaveta.

28. Há 625 modos de responder às 4 primeiras questões. Calcule o número médio de candidatos por modo de responder às 4 primeiras questões.

29. Por exemplo, a afirmação é verdadeira para $k = 2$. Há 25 modos de responder às duas primeiras questões da prova. O maior grupo de candidatos, para o qual não se poderia garantir a existência de pelo menos 4 candidatos com respostas idênticas, seria um grupo onde houvesse 3 candidatos em cada uma das 25 alternativas, ou seja, seria um grupo de 75 candidatos.

30. Tome um ponto x qualquer e considere os pontos $x, x+1, x+2, \ldots, x+11$. Esses 12 pontos estarão coloridos com apenas 11 cores.

31. Este exercício é igual ao exercício 23.

32. Divida em seis retângulos 1×2.

33. As diferenças podem ter apenas 14 valores: $1, 2, \ldots, 14$. Há $C_8^2 = 28$ diferenças, das quais no máximo uma pode ter valor 14. Há pelo menos 27 diferenças que podem ter apenas 13 valores: $1, 2, \ldots, 13$.

34a. Se $x_1 < x < x_2$, $\lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ pertence a (0,1).

35a. Pense apenas em x_1 e x_2.

6.2 A Desigualdade das Médias

A desigualdade das médias afirma que a média aritmética de n números positivos é maior que ou igual à sua média geométrica e só é igual se os números forem todos iguais. Isto é, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Além disso,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Várias e interessantes demonstrações dessa desigualdade são encontradas em "Meu Professor de Matemática" de Elon Lages Lima. Aqui faremos apenas um esboço da demonstração que foi feita por Cauchy[2].

Provaremos primeiramente a desigualdade no caso $n = 2$.

Sendo $A(x_1, x_2)$ a média aritmética dos números positivos x_1 e x_2 e sendo $G(x_1, x_2)$ sua média geométrica, temos

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) - G(x_1, x_2) &= \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}}{2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2}{2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

e $A(x_1, x_2) - G(x_1, x_2)$ só é igual a 0 quando $x_1 = x_2$, o que prova a desigualdade no caso $n = 2$.

Para prová-la no caso $n = 4$, aplicamos o resultado anterior

[2]Cauchy, Louis (1789-1857), matemático francês.

aos números

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{x_3 + x_4}{2},$$

obtendo

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geqslant \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)},$$

ou seja,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geqslant \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)},$$

a igualdade só sendo obtida quando

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{x_3 + x_4}{2}$$

forem iguais. Aplicando agora duas vezes a desigualdade no caso $n = 2$, primeiramente para x_1 e x_2, e posteriormente para x_3 e x_4, obtemos

$$\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}\frac{x_3 + x_4}{2}} \geqslant \sqrt{\sqrt{x_1 x_2}\sqrt{x_3 x_4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

a igualdade sendo obtida apenas quando $x_1 = x_2$ e $x_3 = x_4$.

Portanto,

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

a igualdade só sendo obtida quando $x_1 = x_2$ e $x_3 = x_4$ e

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2},$$

isto é, quando $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

É claro que, repetindo esse argumento, provaríamos a desigualdade das médias para 8, 16, 32,... números positivos.

Esse argumento permite provar, por indução, a desigualdade para $n = 2^k$ números positivos.

Provaremos agora a desigualdade para três números positivos.

Sejam x_1, x_2 e x_3 números positivos e sejam A sua média aritmética e G sua média geométrica. É claro que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + A}{4} = \frac{3A + A}{4} = A.$$

Aplicando a desigualdade das médias no caso $n = 4$ aos números x_1, x_2, x_3 e A, obtemos

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + A}{4} \geqslant \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 A}.$$

$A^4 \geqslant x_1 x_2 x_3 A$, $A^3 \geqslant x_1 x_2 x_3$, $A \geqslant \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = G$, a igualdade só se verificando quando $x_1 = x_2 = x_3 = A$, isto é, quando $x_1 = x_2 = x_3$.

Se desejássemos provar a desigualdade para cinco números positivos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, aplicaríamos a desigualdade aos 8 números x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, A, A e A, onde A é a média aritmética dos números x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5.

O mesmo raciocínio pode mostrar que, se a desigualdade é verdadeira para $n = k$, então ela é também verdadeira para todo $n < k$. □

Exemplo 1. Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro $2p$, o quadrado é o de maior área.

Solução. Se os lados do retângulo são x e y, temos $x + y = p$, isto é, a média aritmética de x e y é igual a $\frac{p}{2}$ · A área do retângulo é $A = xy$. Temos

$$\sqrt{A} = \sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2} = \frac{p}{2}.$$

Portanto,

$$A \leqslant \frac{p^2}{4}$$

e a igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de área

$$\frac{p^2}{4}. \qquad \square$$

Exemplo 2. Mostre que, entre todos os retângulos de área A, o quadrado é o de menor perímetro.

Solução. Se os lados do retângulo são x e y, temos $xy = A$, isto é, a média geométrica de x e y é igual a $\sqrt{A}$. O perímetro do retângulo é $2(x+y)$. Temos

$$2(x+y) = 4\frac{x+y}{2} \geqslant 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{A}.$$

Portanto, $2(x+y) \geqslant 4\sqrt{A}$ e a igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de menor perímetro é o quadrado de perímetro $4\sqrt{A}$. □

A desigualdade das médias pode ser generalizada.

6.3 Desigualdade das Médias Generalizada

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e Q, A, G e H são suas médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, então $Q \geqslant A \geqslant G \geqslant H$. Além disso, duas quaisquer dessas médias são iguais se e somente se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Exercícios

1. Prove que o produto de dois números de soma constante é máximo quando esses números são iguais.

2. Prove que a soma de dois números positivos de produto constante é mínima quando esses números são iguais.

3. Prove que a média harmônica de n números positivos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

é sempre menor que ou igual a sua média geométrica e só é igual quando todos os números são iguais.

4. Prove que a média quadrática de n números positivos

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

é sempre maior que ou igual a sua média aritmética e só é igual quando todos os números são iguais.

5. Prove que se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números positivos e

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

é uma reordenação de $a_1, a_2, \dots, a_n$ então $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant n$.

6. Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$, para quaisquer x, y e z reais.

7. Prove que $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt{\frac{a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3}{3}} \geqslant \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, i se a_1, a_2, a_3 positivos.

8. Mostre que se a equação $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$, na qual a, b e c são números positivos possuir três raízes reais então $a^6 \geqslant 27b^3 \geqslant 729c^2$.

9. Um mágico se apresenta usando um paletó cintilante e uma calça colorida e não repete em suas apresentações o mesmo conjunto de calça e paletó. Para poder se apresentar em 500 espetáculos, qual o menor número de peças de roupa que pode ter seu guarda-roupa?

10. Prove que entre todos os triângulos de perímetro constante, o equilátero é o de maior área.

11. a) Prove que, se x é positivo, então $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

b) Qual o valor mínimo de $x + \frac{4}{x}$, x positivo?

12. Prove que a seqüência de termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é estritamente crescente, isto é, prove que, para todo n inteiro e positivo, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

13. Prove que, se x, y e z são positivos, então

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{9}{x+y+z}.$$

14. Prove que, se x, y e z são positivos, então

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\geqslant 9\sqrt[3]{xyz}.$$

15. Se x, y e z são números positivos tais que $1\leqslant xy+yz+zx\leqslant 3$, qual é o conjunto de valores de xyz? E de $x+y+z$?

16. Se x, y e z são números positivos tais que $xy+yz+zx\leqslant 3$, qual é o conjunto de valores de xyz? E de $x+y+z$?

17. Se x, y e z são números positivos tais que $xy+yz+zx\geqslant 1$, qual é o conjunto de valores de xyz? E de $x+y+z$?

18. Se x, y e z são números positivos tais que $1\leqslant x+y+z\leqslant 3$, qual é o conjunto de valores de xyz? E de $xy+yz+zx$?

19. Se x, y e z são números positivos tais que $1\leqslant xyz\leqslant 3$, qual é o conjunto de valores de $xy+yz+zx$? E de $x+y+z$?

20. Se x, y e z são números positivos tais que $xyz=8$, qual é o conjunto de valores de $xy+yz+zx$? E de $x+y+z$?

21. Prove que, se a desigualdade das médias é válida para m números positivos, $m>2$, então ela é válida também para $m-1$ números positivos.

Sugestões aos Exercícios

1. Se $x+y=a$, $xy=x(a-x)$ é um polinômio do segundo grau em x.

2. Veja o exemplo 2.

3. Aplique a desigualdade das médias aos inversos dos números dados.

4. Sejam Q e A as médias quadrática e aritmética de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente. Use $\sum_{k=1}^{n}(x_k-A)^2\geqslant 0$. Lembre-se de que $\sum_{k=1}^{n}x_k=nA$ e que uma soma de quadrados é igual a 0 se e somente se todas as parcelas são nulas.

5. Aplique a desigualdade das médias aos números $\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}$.

6. Aplique a desigualdade das médias aos pares (x^2, y^2), (y^2, z^2) e (z^2, x^2).

7. Aplique a desigualdade das médias aos números a_1a_2, a_1a_3 e a_2a_3. Use também o problema 6.

8. Mostre que a equação não pode ter raízes nulas ou negativas. Use o problema anterior.

9. Com x paletós e y calças, o mágico consegue formar xy conjunto diferentes. Com 44 peças, o mágico formaria o número máximo de conjuntos diferentes se fossem 22 paletós e 22 calças, porque o produto de dois números de soma constante é máximo quando esses números são iguais. Como $22 \times 22 = 484$, 44 peças não bastam.

10. Use a fórmula de Heron[3], $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Para S ser máxima, $(p-a)(p-b)(p-c)$ deve ser máximo.

11a. Aplique a desigualdade das médias aos números x e $\frac{1}{x}$.

12. Aplique a desigualdade das médias aos números $x_1 = 1$ e

$$x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}.$$

13. Aplique a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica aos números x y e z.

14. Aplique a desigualdade das médias aos números $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ e $\sqrt{z}$.

15a. A desigualdade das médias aplicada aos números xy, yz e zx mostra que $xyz \leqslant 1$. Além disso é claro que xyz alcança o valor 1 quando $x = y = z = 1$. Por outro lado, como x, y e z são positivos, $xyz > 0$. Para mostrar que xyz consegue ficar arbitrariamente próximo de 0, basta tomar

$$x = y = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad z = n,$$

com n natural arbitrariamente grande.

[3] Heron, matemático de Alexandria, do segundo século antes de Cristo.

15b. O problema 7 mostra que $x+y+z \leqslant \sqrt{3}$. Além disso $x+y+z$ alcança o valor $\sqrt{3}$ quando

$$x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por outro lado, $x + y + z$ pode se tornar arbitrariamente grande, tomando

$$x = y = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad z = n,$$

com n natural arbitrariamente grande.

Capítulo 7

Pontos, Retas e Planos

7.1 Do Plano para o Espaço

O grande desafio em ensinar Geometria a alunos do 2º grau é fazer a transição do plano para o espaço. Embora estejamos habituados a figuras geométricas tridimensionais (convivemos todo o tempo com planos, cubos, esferas, cones, cilindros, etc) é no 2º grau que tais figuras são estudadas, pela primeira vez, de forma sistemática. Esta ampliação de horizontes nem sempre é fácil para o aluno. O início do estudo sistemático de Geometria Plana, em geral na 6ª ou 7ª série do 1º grau, vem depois de longos anos nos quais o aluno se prepara, de certo modo, para estudar figuras planas. Ele não as observa simplesmente no mundo real; ele está constantemente desenhando tais figuras, o que contribui para a criação de modelos mentais para elas. Embora o aluno possa ter dificuldades no aprendizado de Geometria, em geral ele não tem dificuldade de entender as propriedades essenciais das figuras geométricas simples. Conceitos básicos como paralelismo, perpendicularismo e congruência são bem entendidos pelo aluno. Além disso, em caso de dificuldades, é sempre possível experimentar através de desenhos ou de modelos das figuras.

Tais facilidades não ocorrem quando se começa a estudar Geometria Espacial. As relações entre as figuras geométricas fundamentais são bem mais complexas do que na Geometria Plana. O estudo de paralelismo, por exemplo, que na Geometria Plana se reduz a paralelismo entre retas, agora é complicado pelo fato de

existirem, no espaço, retas que não são nem paralelas nem concorrentes e pelas relações de paralelismo envolvendo planos. Há, também, uma dificuldade muito maior de se fazer este estudo com apoio em modelos concretos. Além de os alunos do 2º grau já não estarem mais, de modo geral, propensos ao uso de tais modelos, é muito mais difícil construí-los de modo a serem úteis. Por exemplo, o uso de folhas de cartolina para representar dois planos pode levar um aluno à conclusão de que a interseção de dois planos pode ser um ponto... (figura 7.1).

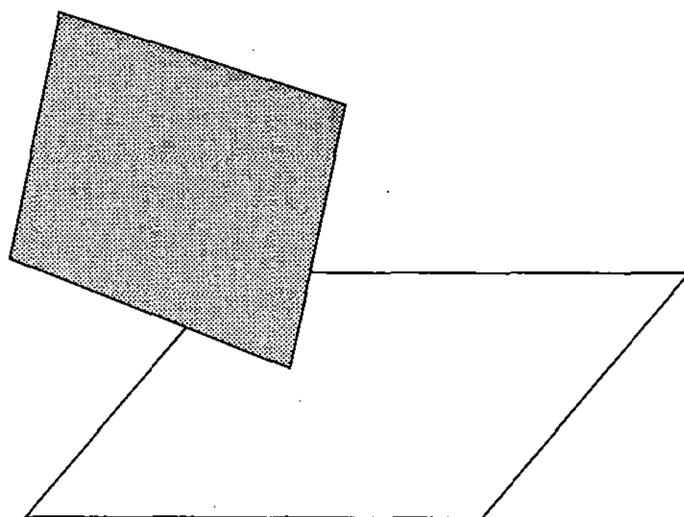


Fig. 7.1 - Interseção de planos pode resultar em um único ponto?

O exemplo acima não deve ser entendido como uma recomendação para que não sejam usados modelos do mundo real como exemplos de figuras espaciais, com o intuito de exemplificar relações entre elas. Mas a limitação de tais modelos faz com que eles não bastem. É preciso algo mais: ter alguma imaginação, desenvolver alguma habilidade de fazer representações de tais figuras em papel e, principalmente, adquirir um bom conhecimento das propriedades fundamentais entre as figuras geométricas espaciais, de modo que relações entre elas possam ser deduzidas através de uma argumentação geométrica, já que raramente tais relações podem ser observadas diretamente em uma figura ou um modelo. É muito importante, também, desenvolver no aluno a habilidade de fazer bom proveito de seus conhecimentos de Geome-

tria Plana. Em muitos problemas, a técnica de resolução consiste em identificar um ou mais planos "onde a ação ocorre", isto é, que contêm os elementos relevantes ao problema, e aplicar Geometria Plana para obter relações entre esses elementos.

Para que tudo isso seja possível, é importante que os conceitos fundamentais da Geometria Espacial sejam apresentados com cuidado. Uma alternativa é aproveitar a ocasião para apresentar uma formulação axiomática para a Geometria. Uma formulação axiomática consiste na identificação de um certo conjunto de noções primitivas não definidas e de um conjunto de axiomas ou postulados, que são propriedades aceitas como verdadeiras. As demais propriedades (os teoremas) são demonstrados a partir destes postulados.

O conjunto de postulados escolhidos para uma teoria matemática deve satisfazer a dois requisitos: ele deve ser consistente (isto é, não deve ser possível chegar a contradições a partir dos postulados) e suficiente (isto é, deve ser possível determinar a veracidade de uma afirmativa a partir dos postulados). Além disso, é desejável que os postulados reflitam fatos que indiscutivelmente correspondam à nossa intuição a respeito dos objetos fundamentais da teoria. A primeira iniciativa no sentido de criar uma teoria axiomática para a Geometria é de Euclides, mas Hilbert, no início deste século foi o primeiro a propor um conjunto de axiomas para a Geometria ao mesmo tempo consistente e suficiente.

O fato de que foram necessários mais de 2000 anos para se chegar a uma formulação axiomática correta para a Geometria mostra que tal tarefa é mais delicada do que pode parecer à primeira vista. O sistema de axiomas não deve apenas formular propriedades relativas a determinação e incidência de pontos, retas e planos mas também dar validade a noções intuitivas como ordem, separação e medida de ângulos e segmentos. Uma discussão mais completa do que a apresentada aqui sobre os fundamentos da Geometria Espacial pode ser encontrada no livro "Introdução à Geometria Espacial", de Paulo C.P. Carvalho, da Coleção do Pro-

fessor de Matemática da SBM. Para os fundamentos da Geometria Plana, recomendamos "Geometria Euclidiana Plana", de João Lucas Marques Barbosa, da mesma coleção.

7.2 Noções Primitivas e Axiomas

Na nossa opinião, não é apropriado apresentar, no 2º grau, uma teoria axiomática formal para a Geometria Espacial. Mas é importante estabelecer as regras básicas do jogo, introduzindo as entidades fundamentais (ponto, reta, plano, espaço) como noções primitivas e apresentando alguns dos axiomas como propriedades a serem aceitas sem demonstração.

Muitas vezes o aluno recebe com certa surpresa o fato de que a Geometria se baseia em algumas noções para as quais não é apresentada definição e em algumas propriedades para as quais não é apresentada uma demonstração. É importante que o professor esclareça que isto ocorre com qualquer teoria matemática (veja a discussão no capítulo 2 do primeiro volume desta série).

O fato de ponto, reta, plano e espaço serem noções primitivas da Geometria não significa que não se possa reforçar a intuição do aluno a respeito dessas noções. De uma certa forma, isto ocorria já nos Elementos de Euclides, em que, por exemplo, ponto é definido como "aquilo que não possui partes" (ou seja, é indivisível), linha é "o que possui comprimento mas não largura" e reta é "uma linha que jaz igualmente com respeito a todos os seus pontos" (isto é, uma linha onde não existem pontos "especiais").

Embora tais descrições não possam ser utilizadas como definições (por utilizarem outros termos não definidos, como "comprimento", "largura", etc), ajudam a correlacionar entidades matemáticas com imagens intuitivas. Deve-se, porém, esclarecer para o aluno que, do ponto de vista matemático, o que importa é estabelecer uma quantidade mínima de propriedades (postulados) que sejam capazes de caracterizar o comportamento destas entidades.

Abaixo, são dadas algumas das propriedades essenciais rela-

cionando as noções de ponto, reta, plano e espaço, e que podem ser utilizadas como postulados da Geometria Espacial.

Postulado 1. Dados dois pontos distintos do espaço existe uma, e somente uma, reta que os contém.

Postulado 2. Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.

Postulado 3. Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

Uma vez tendo estabelecido estas propriedades como axiomas, podemos utilizá-las na demonstração de outras propriedades, como ilustrado abaixo.

Teorema. Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Prova. Seja P um ponto não pertencente à reta r. Tomemos, sobre r, dois pontos distintos Q e R (figura 7.2). Os pontos P, Q e R não são colineares (de fato, pelo Postulado 1, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r). Pelo Postulado 2, sabemos que existe um único plano α contendo P, Q e R. Como a reta r tem de dois de seus pontos (Q e R) em α, o Postulado 3 estabelece que r está contida em α. Logo, de fato existe um plano contendo r e P. Como este é o único plano que contém P, Q e R, ele é o único que contém P e r.

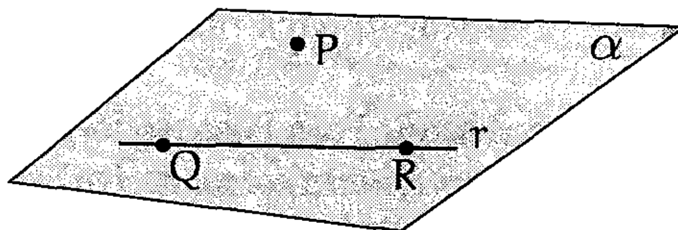


Fig. 7.2 - Uma reta e um ponto exterior determinam um plano.

Embora o leitor possivelmente não tenha percebido, na demonstração do teorema acima fizemos uso de uma construção que,

a rigor, deveria ser justificada. A reta r e o ponto P são fornecidos pelo enunciado do teorema. No entanto, os pontos Q e R foram construídos na demonstração. Nossa experiência nos diz que, dada uma reta, existem uma infinidade de pontos que pertencem a ela (portanto, estamos livres para escolher dois pontos arbitrários sobre ela) e uma infinidade de pontos que não pertencem a ela. O mesmo vale para um plano. Se quiséssemos fazer uma construção axiomática rigorosa seria necessário introduzir axiomas referentes a tais propriedades.

Nas seções a seguir procuraremos desenvolver, a partir dos postulados, outras propriedades relativas a pontos, retas e planos, respondendo a questões fundamentais como as abaixo:

- *Que combinações de pontos e retas determinam um plano?*
- *Como pode ser a interseção de duas retas no espaço? E de dois planos? E de uma reta e um plano?*

Como veremos, nem todas estas perguntas podem ser respondidas usando os postulados acima. Utilizaremos nossa procura de respostas a estas perguntas justamente para motivar a introdução de outros postulados. A mesma estratégia pode (e deve) ser usada com alunos do 2º grau: ao invés de apresentar propriedades já prontas, é melhor descobrí-las juntamente com os alunos.

7.3 Posição de Retas

A partir das respostas às perguntas "como pode ser a interseção de duas retas?" e "quando duas retas determinam um plano?", obtemos uma importante classificação para um par de retas distintas do espaço.

Comecemos pela interseção. Pelo Postulado 1, *duas retas distintas podem ter no máximo um ponto comum*. De fato, como existe uma única reta que passa por dois pontos distintos, duas retas que tenham mais de um ponto comum são obrigatoriamente coincidentes (isto é, são a *mesma* reta).

Quando duas retas têm exatamente um ponto comum, elas são chamadas de *concorrentes* e *sempre determinam um plano*.

De fato, seja P o ponto de interseção das retas r e s (figura 7.3). Sejam R e S pontos de r e s, respectivamente, distintos de P. Os pontos P, R e S são não colineares; portanto, determinam um único plano α, que certamente contém r e s, já que essas retas têm dois de seus pontos em α.

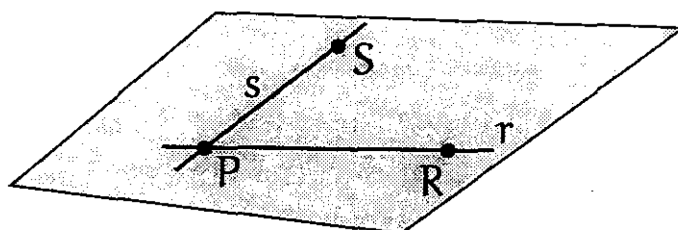


Fig. 7.3 - Duas retas concorrentes determinam um plano.

Já quando duas retas não possuem ponto em comum, elas podem ou não determinar um plano. Consideremos a situação da figura 7.4, que mostra três pontos não colineares A, B e C, que determinam um plano α, um ponto D exterior a α, e as retas r e s, definidas por A e B e por C e D, respectivamente. É claro que *não existe nenhum ponto comum a* r *e* s.

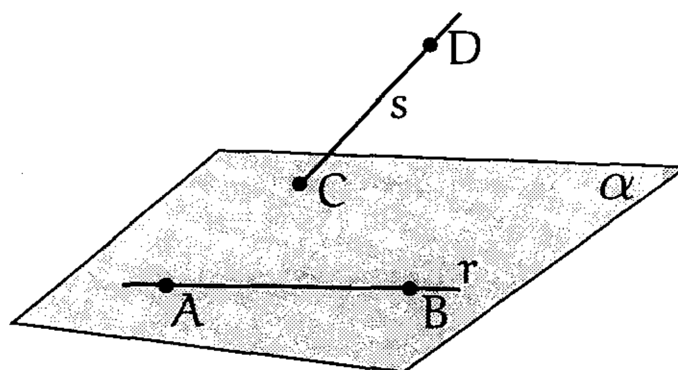


Fig. 7.4 - Retas reversas.

Note que s só tem o ponto C em comum com α; se tivesse um outro ponto comum, s teria que estar contida em α, o que é impossível, já que D é exterior a α. Por outro lado, *não existe nenhum plano que contenha, simultaneamente,* r *e* s. Basta observar que α é o único plano que passa por A, B e C e que D não pertence a este plano. Retas como r e s são chamadas de retas *não-coplanares* ou *reversas*.

Retas reversas sempre possuem interseção vazia. Mas duas retas do espaço podem não ter pontos de interseção e serem coplanares. Neste caso, dizemos que as retas são *paralelas*. Sabemos, da Geometria Plana, que por um ponto do plano exterior a uma reta passa uma única reta paralela a ela. O mesmo ocorre no espaço. Isto é, *por um ponto* P *exterior a uma reta* r *do espaço passa uma única reta* s *paralela a ela*. De fato, seja r uma reta do espaço e seja P um ponto não pertencente a r (figura 7.5). Como vimos acima, existe um único plano α que contém P e r; nesse plano, existe uma, e somente uma, reta s paralela a r passando por P. Por outro lado, não existem retas paralelas a r passando por P que não estão contidas em α, já que *todas* as retas coplanares com r passando por P estão contidas em α. Assim, a reta s é a única reta do espaço que contém P e é paralela a r.

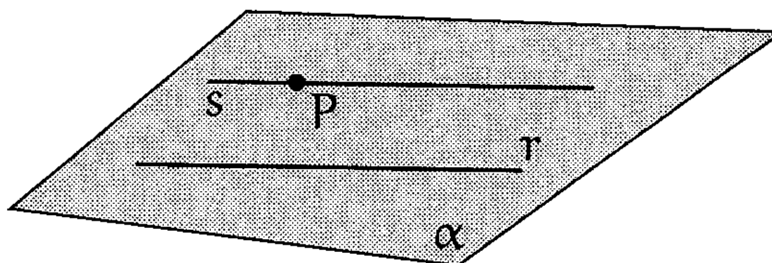


Fig. 7.5 - Retas paralelas.

Em resumo, duas retas distintas do espaço estão em um dos casos dados no quadro abaixo:

Posição relativa de r e s	**Interseção de r e s**	**r e s são coplanares?**
Concorrentes	exatamente um ponto	Sim
Paralelas	vazia	Sim
Reversas	vazia	Não

7.4 Posição Relativa de Reta e Plano

A pergunta relevante agora é: "como pode ser a interseção de uma reta e um plano?" Pelo Postulado 3, se uma reta r possui dois ou mais pontos pertencentes a um plano α, todos os seus pontos estarão em α; isto é r estará *contida* em α (figura 7.6).

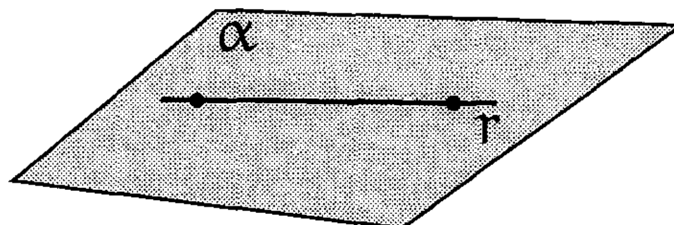


Fig. 7.6 - Uma reta contida em um plano.

Um outro caso possível é aquele em que r tem apenas um ponto em comum com α (dizemos nesse caso que r é *secante* a α). A figura 7.7 mostra um ponto P pertencente a um plano α e um ponto exterior Q. A reta r definida por P e Q é secante a α.

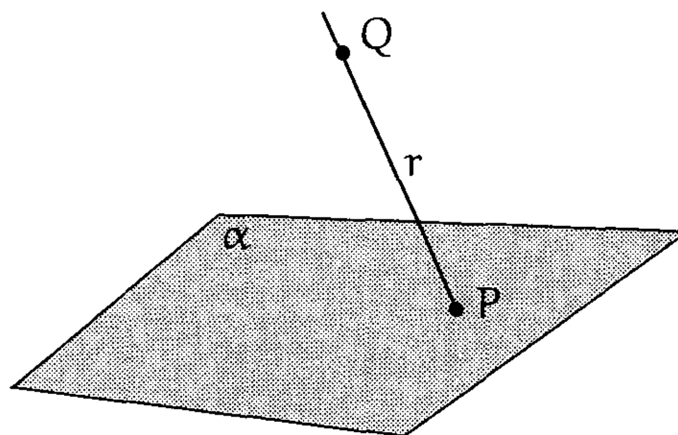


Fig. 7.7 - Uma reta secante a um plano.

Finalmente, uma reta pode não ter pontos em comum com um plano (dizemos que a reta e o plano são *paralelos*). Seja α um plano, r uma reta contida em α e P um ponto exterior a α (figura 7.8). A reta s, paralela a r passando por P, é paralela a α. De fato, seja β o plano definido por r e s. Se s não fosse paralela a α, a interseção de r e α seria um ponto Q não pertencente a r, já que r e s são paralelas. Mas isto faria com que os planos distintos

α e β tivessem em comum a reta r e o ponto exterior Q, o que é impossível.

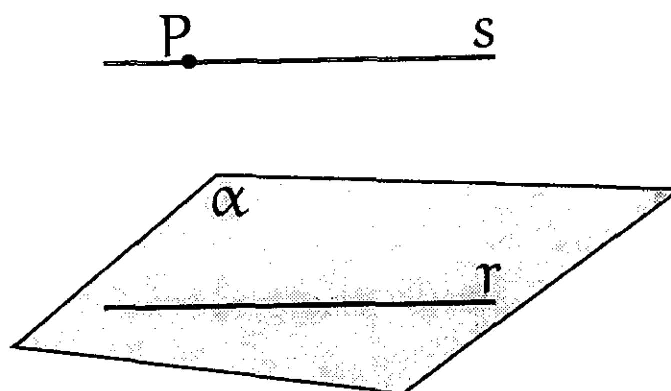


Fig. 7.8 - Uma reta paralela a um plano.

Em resumo, uma reta r e um plano α podem estar em um dos casos a seguir:

Posição relativa de r e α	**Interseção de r e α**
r contida em α	a própria reta r
r secante a α	um único ponto
r paralela a α	vazia

7.5 Posição Relativa de Dois Planos

Obtemos uma classificação para a posição relativa de dois planos procurando responder à pergunta: "como pode ser a interseção de dois planos distintos?". A primeira observação é a seguinte:

Se dois planos distintos possuem mais de um ponto em comum, sua interseção é uma reta (neste caso, dizemos que os planos são *secantes*).

De fato, se os pontos P e Q são comuns a α e β, então, pelo Postulado 3, a reta r definida por P e Q está contida, simultaneamente, em α e β e, portanto, em sua interseção. Por outro lado, se houvesse um ponto R comum a α e β que não pertencesse a r,

os planos α e β seriam coincidentes, já que r e R determinam um único plano. Logo, r é a interseção de α e β.

A figura 7.9 mostra uma situação em que temos dois planos secantes. O plano α é definido pela reta r e pelo ponto exterior A. O ponto B é exterior a α e define com r um outro plano β. Os planos α e β têm por interseção a reta r; são, portanto, secantes.

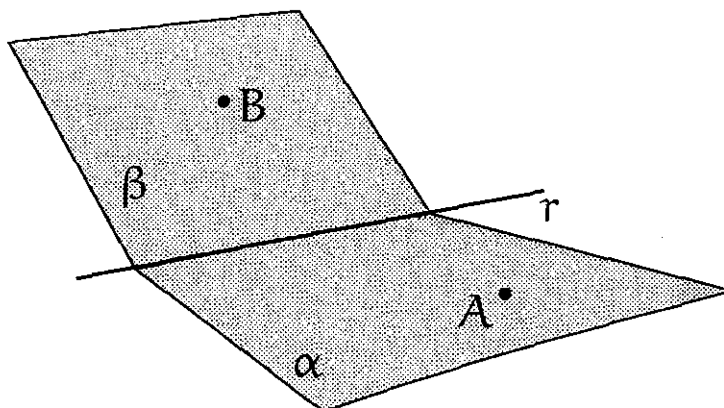


Fig. 7.9 - Planos secantes.

A próxima possibilidade a ser considerada é a de dois planos terem exatamente um ponto em comum. Uma consulta a nosso modelo mental para planos no espaço tridimensional nos convencerá de que essa possibilidade não existe. Tal impossibilidade, no entanto, não decorre dos postulados anteriores (na verdade, na Geometria Euclidiana do espaço de dimensão superior a 3, é perfeitamente possível dois planos terem exatamente um ponto em comum) e deve ser estabelecida através de mais um postulado.

Postulado 4. Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.

Resta-nos apenas mais uma possibilidade: a de que os planos sejam paralelos (isto é, não possuam pontos comuns). Mas existem realmente planos que não tenham ponto em comum? Nossa intuição diz que sim, e o argumento a seguir fornece uma confirmação, mostrando como construir um plano paralelo a um outro.

Construção de um plano paralelo a um plano dado. Seja P um ponto exterior ao plano α (figura 7.10). Tomemos duas retas

concorrentes r e s em α. Sejam r' e s' as paralelas a r e s conduzidas por P. Estas retas determinam um plano β, que é, como vamos provar, paralelo a α.

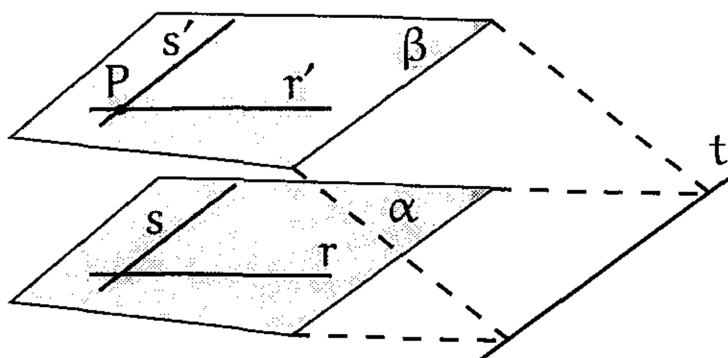


Fig. 7.10 - Planos paralelos.

Suponhamos que β não seja paralelo a α. Então α e β possuem uma reta de interseção t. As retas r', s' e t são coplanares. Por outro lado, as retas r' e s' não podem ser ambas paralelas a t. Logo, pelo menos uma delas (digamos r') é concorrente com t e, portanto, secante a α. Mas como r' é paralela a uma reta de α, resulta que r' é paralela a α. Temos, portanto, uma contradição, o que demonstra que α e β são paralelos.

A construção acima mostra como construir *um* plano paralelo a α passando pelo ponto exterior P. Na verdade, este plano é *único* (veja o exercício 19).

O quadro abaixo resume as situações possíveis para a posição relativa de dois planos distintos α e β:

Posição relativa de α e β	**Interseção de α e β**
secantes	uma reta r
paralelos	vazia

7.6 Construindo Sólidos

Com as propriedades já estabelecidas, podemos, já nesse ponto,

construir nossos primeiros sólidos. A maior parte dos livros didáticos para o 2º grau adia a apresentação dos sólidos clássicos (prismas, pirâmides, esfera, etc) para mais tarde, quando se ensina a calcular áreas e volumes desses sólidos. Nada impede, no entanto, que eles sejam apresentados mais cedo, de modo a colaborar na fixação dos conceitos fundamentais, já que exemplos muito mais ricos de situações envolvendo pontos, retas e planos podem ser elaborados com seu auxílio.

Construção de Pirâmides e Cones. Considere um polígono plano $A_1A_2\ldots A_n$ e um ponto V exterior ao plano do polígono (figura 7.11). Traçamos os segmentos $VA_1, VA_2, \ldots, VA_n$. Cada dois vértices consecutivos de $A_1A_2\ldots A_n$ determinam com V um triângulo. Estes triângulos, juntamente com o polígono

$$A_1A_2\ldots A_n,$$

delimitam uma região do espaço, que é a *pirâmide* de *base*

$$A_1A_2\ldots A_n$$

e *vértice* V. A região do espaço limitada pela pirâmide é formada pelos pontos dos segmentos de reta que ligam o vértice V aos pontos do polígono-base. Os segmentos $VA_1, VA_2, \ldots, VA_n$ são chamados *arestas laterais* e os triângulos $VA_1A_2, VA_2A_3, \ldots, VA_nA_1$ de *faces laterais* da pirâmide. Pirâmides triangulares – ou tetraedros – apresentam a particularidade de que qualquer de suas faces pode ser considerada a base da pirâmide.

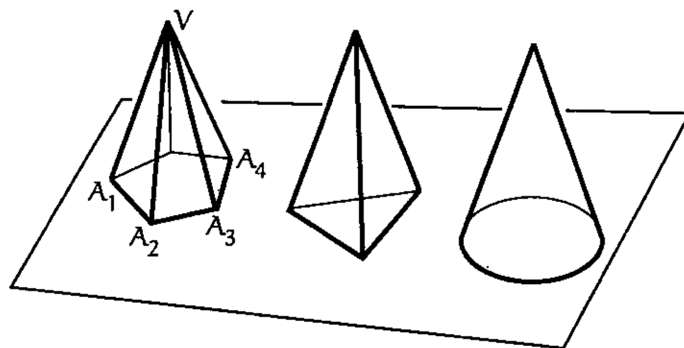


Fig. 7.11 - Uma pirâmide pentagonal, um tetraedro e um cone.

Pirâmides são casos particulares de *cones*. Em um cone, a base não precisa ser um polígono, mas qualquer região plana delimitada por uma curva fechada e simples (isto é, que não corta a si própria). Os cones mais importantes são os cones circulares, em que a base é um círculo. Em um cone, cada um dos segmentos que ligam o vértice aos pontos situados sobre a curva que delimita a base de *geratriz* do cone. A união de todos esses segmentos é uma superfície, chamada de *superfície lateral* do cone.

Construção de Prismas e Cilindros. Seja $A_1A_2 \ldots A_n$ um polígono contido em um plano α (figura 7.12). Escolhemos um ponto B_1 qualquer, não pertencente a α. Por B_1 traçamos o plano β paralelo a α. Pelos demais vértices $A_2, \ldots, A_n$ traçamos retas paralelas a A_1B_1 que cortam β nos pontos $B_2, \ldots, B_n$ (isto implica em que todas estas retas sejam paralelas entre si; veja o exercício 18). Tomemos dois segmentos consecutivos assim determinados; A_1B_1 e A_2B_2, por exemplo. O quadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ é plano, já que os lados A_1B_1 e A_2B_2 são paralelos. Mas isto implica em que os outros dois lados também sejam paralelos, pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam, por estarem contidas em planos paralelos. Portanto, o quadrilátero é um paralelogramo. Os paralelogramos assim determinados, juntamente com os polígonos $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$ determinam um poliedro chamado de *prisma* de bases $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$. A região do espaço delimitada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos nos quais cada extremo está em um dos polígonos-base. As arestas $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ são chamadas de arestas laterais. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento; arestas laterais consecutivas formam paralelogramos, que são chamados de faces laterais do prisma. As bases $A_1A_2 \ldots A_n$ e $B_1B_2 \ldots B_n$ são congruentes. De fato, estes polígonos possuem lados respectivamente iguais e paralelos (já que as faces laterais são paralelogramos) e, em conseqüência, possuem ângulos respectivamente iguais (como na Geometria Plana, *ângulos determinados por retas paralelas do espaço são iguais*; veja o exercício 20).

Um caso particular ocorre quando a base é um paralelogramo. Neste caso, o prisma é chamado de paralelepípedo. Paralelepípedos são prismas que têm a particularidade de que qualquer de suas faces pode ser tomada como base (duas faces opostas quaisquer estão situadas em planos paralelos e são ligadas por arestas paralelas entre si).

A generalização natural de prisma é a noção de *cilindro*, em que a base pode ser qualquer região plana delimitada por uma curva simples e fechada. Cada um dos segmentos paralelos que passam pelos pontos da curva e são delimitados pelos planos paralelos é uma *geratriz* do cilindro.

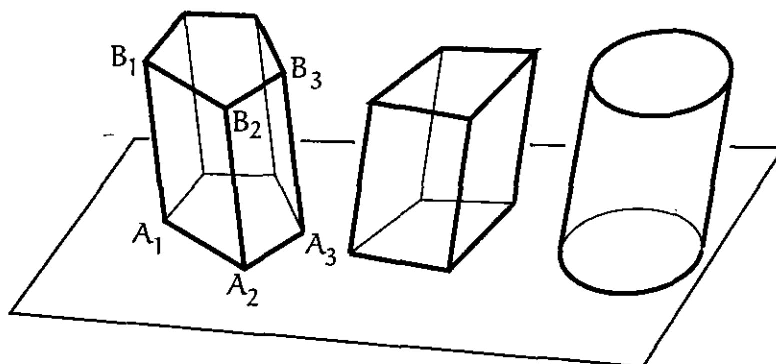


Fig. 7.12 - Um prisma pentagonal, um paralelepípedo e um cilindro.

Aplicações. Vejamos alguns exemplos em que usamos os sólidos definidos acima para ilustrar situações envolvendo interseções de retas e planos.

Exemplo. Consideremos uma pirâmide quadrangular de base $ABCD$ e vértice V (figura 7.13). As arestas laterais opostas VA e VC determinam um plano α, enquanto VB e VD determinam um plano β. Qual é a interseção de α e β?

Os planos α e β são distintos (A, por exemplo, está em α mas não em β) e têm um ponto comum V. Logo, sua interseção é uma reta r que passa por V. Para localizarmos um segundo ponto de r, considermos as interseções de α e β com o plano da base, que são as diagonais AC e BD, respectivamente, do quadrilátero $ABCD$. Logo, o ponto de interseção de AC e BD é comum aos três planos

α, β e ABCD; portanto, está na reta de interseção de α e β. Assim, α e β se cortam segundo a reta que passa por V e pelo ponto de interseção de AC e BD.

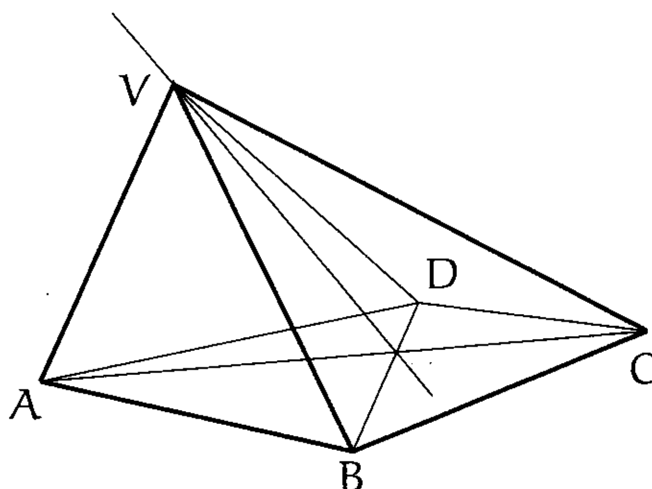


Figura 7.13

Exemplo. Consideremos um prisma triangular ABCDEF (figura 7.14). Quantos planos distintos são determinados por um subconjunto dos 6 vértices do paralelepípedo?

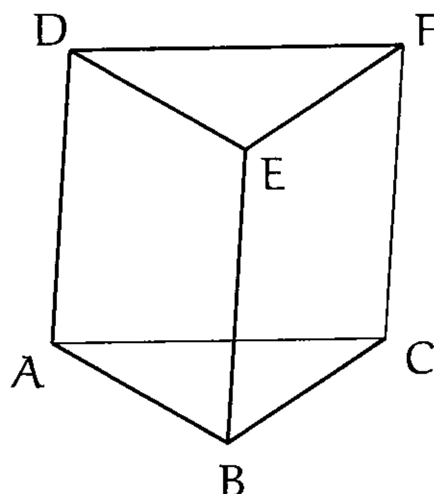


Fig. 7.14 - Planos determinados pelos vértices de um prisma triangular.

Se os 6 vértices do prisma estivessem em posição geral (ou seja, dispostos de forma tal que quatro quaisquer deles não fossem coplanares), cada subconjunto de 3 pontos determinaria um plano. Teríamos, assim, um total de $C_6^3 = 20$ planos. No caso do

prisma triangular, no entanto, a situação não é esta. Podemos começar a listar os planos definidos pelos vértices a partir das faces: temos 3 faces laterais e 2 bases. Outros planos formados a partir dos vértices terão necessariamente que ser determinados por 2 vértices de uma base e pelo vértice da outra base que seja extremo da aresta lateral que não passa por nenhum dos dois primeiros. Há 6 planos nestas condições, já que este último vértice pode ser qualquer um dos vértices do prisma. Temos, então, um total de 11 planos.

7.7 Descobrindo Relações de Paralelismo

Apresentamos abaixo uma lista de situações nas quais o paralelismo de certas entidades (planos ou retas) pode ser deduzida a partir do paralelismo de outras retas e planos.

1) Uma reta é paralela a um plano se e somente se ela é paralela a uma reta do plano.
2) Dados dois planos secantes, uma reta de um deles é paralela ao outro se e somente se ela é paralela à reta de interseção dos dois planos.
3) Se um plano α corta o plano β segundo a reta r, então ele corta qualquer plano paralelo a β segundo uma reta paralela a r.
4) Dois planos são paralelos se e somente se um deles é paralelo a duas retas concorrentes do outro (alternativamente, dois planos distintos são paralelos se e somente se um deles contém duas retas concorrentes respectivamente paralelas a duas retas do outro).

Algumas dessas propriedades já foram apresentadas ou aplicadas anteriormente, e sua demonstração fica por conta do leitor. A seguir mostramos situações em que podemos utilizar as propriedades acima para identificar relações de paralelismo em um sólido simples.

Exemplo. Vamos tomar um paralelepípedo $ABCDEFGH$ e observar algumas relações de paralelismo entre as retas e planos lá presentes (figura 7.15)

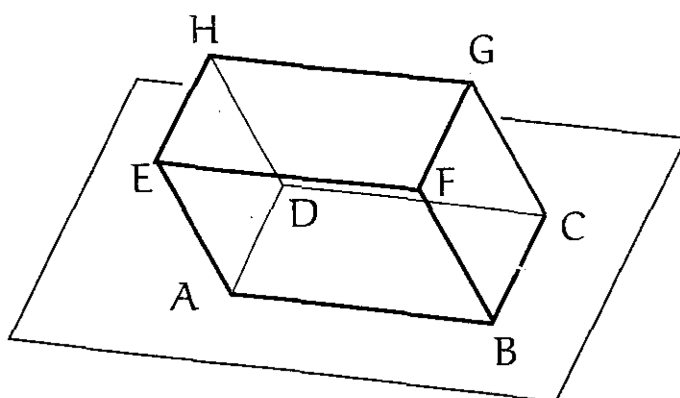


Figura 7.15

a) *A aresta* AE *é paralela à face* BCGF.

Justificativa. Basta notar que AE é paralela à reta BF de BCGF.

b) *A diagonal* AH *da face* ADHE *também é paralela à face* BCGF.

Justificativa. Os planos das faces opostas de um paralelepípedo são paralelos (note que as retas AD e AE de ADHE são respectivamente paralelas às retas BC e BF de BCGF). Como AH está contida em um plano paralelo à face BCGF, AH é necessariamente paralela a BCGF.

c) *A interseção dos planos* α *e* β *determinados pelos pares de arestas laterais opostas* (AE, CG) *e* (BF, DH) *é uma reta que passa pelos pontos* Q *e* R *de interseção das diagonais das bases e que é paralela a aquelas arestas* (figura 7.16).

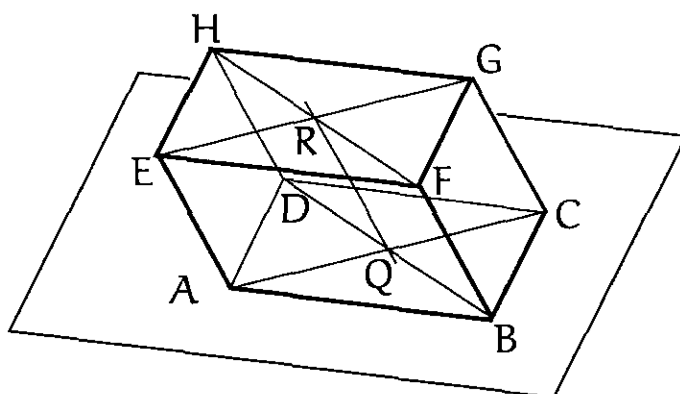


Figura 7.16

Justificativa. Primeiro, observamos que as diagonais AC e BD da base inferior estão contidas, respectivamente, em α e β. Logo

seu ponto Q de interseção está na reta de interseção. O mesmo argumento se aplica a R.

Por outro lado, AE é paralela a β, já que é paralela à reta BF de β. Portanto, AE é necessariamente paralela à reta r de interseção de α e β.

d) *O plano α determinado pelos pontos* A, C *e* H *é paralelo ao plano* β *determinado pelos pontos* B, E *e* G (figura 7.17).

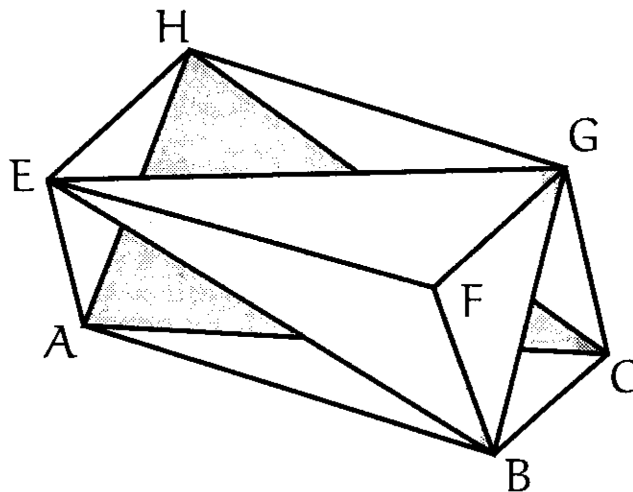


Figura 7.17

Justificativa. Tomemos as diagonais faciais AC e EG. As retas AC e EG são as interseções do plano definido pelas arestas laterais AE e CG com os planos (paralelos) das bases do paralelepípedo. Logo AC e EG são paralelas. O mesmo argumento se aplica, por exemplo, a BG e AH. Logo α possui um par de retas concorrentes que são paralelas a retas de β e, em conseqüência, α e β são paralelos.

7.8 Planos Paralelos e Proporcionalidade

Da Geometria Plana trazemos o (bom) hábito de associar retas paralelas com proporcionalidade, através do Teorema de Tales (que estabelece a proporcionalidade dos segmentos determinados em duas secantes por um feixe de retas paralelas) e de semelhança de triângulos (ao se cortar um triângulo por uma reta paralela a

uma dos lados se obtém um triângulo semelhante a ele). Existem propriedades perfeitamente análogas para planos paralelos.

Teorema de Tales para Planos Paralelos. Um feixe de planos paralelos determina segmentos proporcionais sobre duas retas secantes quaisquer.

Demonstração. A demonstração consiste em reduzir o teorema ao seu correspondente no plano, que é o teorema de Tales sobre feixe de retas paralelas. Sejam α, β e γ três planos paralelos e sejam r_1 e r_2 duas retas secantes quaisquer (figura 7.18).

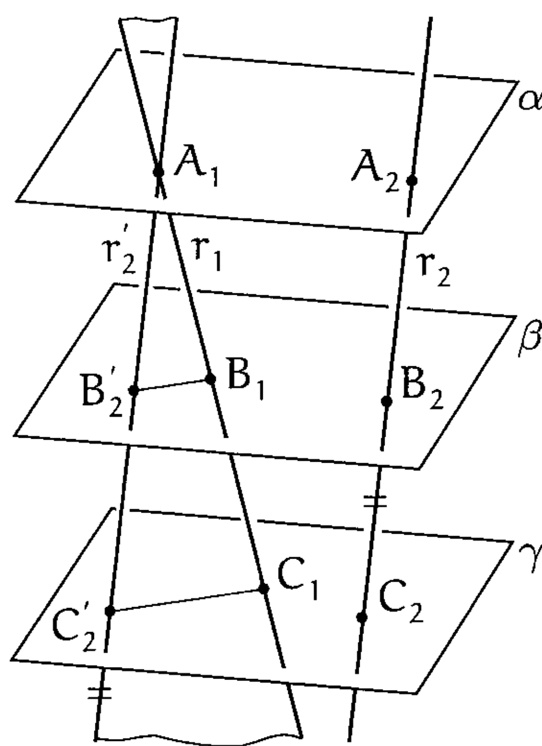


Fig. 7.18 - Teorema de Tales para planos paralelos.

A reta r_1 corta os planos nos pontos A_1, B_1 e C_1 e r_2 corta os mesmos planos nos pontos A_2, B_2 e C_2. Pelo ponto A_1 de r_1 traçamos uma reta r_2' paralela a r_2, que corta os três planos nos pontos A_1, B_2' e C_2'. As retas r_1 e r_2' determinam um plano, que corta β e γ segundo as retas paralelas B_1B_2' e C_1C_2'. Logo, pelo Teorema de Tales para retas paralelas, temos $\frac{A_1B_1}{A_1B_2'} = \frac{B_1C_1}{B_2'C_2'} = \frac{A_1C_1}{A_1C_2'}$ · Mas $A_1B_2' = A_2B_2$, $B_2'C_2' = B_2C_2$ e $A_1C_2' = A_2C_2$, por serem segmen-

tos de retas paralelas compreendidos entre retas paralelas. Logo, temos $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$.

Construção de Pirâmides Semelhantes. Consideremos agora uma pirâmide de base $A_1A_2\ldots A_n$ e vértice V (figura 7.19). Tracemos um plano paralelo à base, que corta as arestas laterais segundo o polígono $B_1B_2\ldots B_n$ e que divide a pirâmide em dois poliedros: um deles é a pirâmide de base $B_1B_2\ldots B_n$ e o outro é chamado de *tronco de pirâmide* de bases $A_1A_2\ldots A_n$ e $B_1B_2\ldots B_n$. Consideremos as duas pirâmides e examinemos suas faces laterais. Na face lateral VA_1A_2, por exemplo, o segmento B_1B_2 é paralelo à base. Em conseqüência, o triângulo VB_1B_2 é semelhante ao triângulo VA_1A_2. Logo, temos $\frac{VB_1}{VA_1} = \frac{VB_2}{VA_2} = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = k$. Aplicando o mesmo raciocínio para as demais faces laterais, concluímos que a razão entre duas arestas correspondentes das duas pirâmides é sempre igual a k.

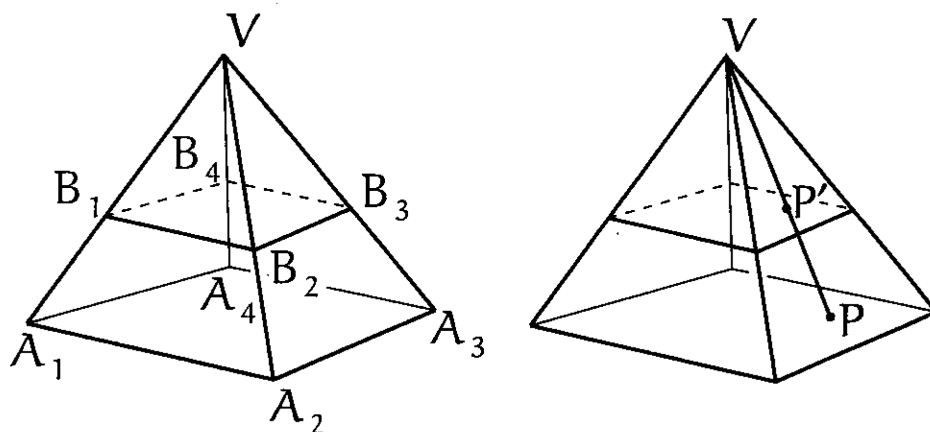


Fig. 7.19 - Seccionando uma pirâmide por um plano paralelo à base.

Na verdade, as duas pirâmides do exemplo são *semelhantes na razão* k, ou seja, é possível estabelecer uma correspondência entre seus pontos de modo que a razão entre os comprimentos de segmentos correspondentes nas duas figuras seja constante.

Esta correspondência é estabelecida da seguinte forma: dado um ponto P da pirâmide $VA_1A_2\ldots A_n$, seu correspondente na pi-

râmide $VB_1B_2 \ldots B_n$ é o ponto P' sobre VP tal que $\frac{VP'}{VP} = k$. O ponto P' certamente pertence à segunda pirâmide. Além disso, tomando um segundo par de pontos correspondentes Q e Q', os triângulos $VP'Q'$ e VPQ são semelhantes na razão k, o que implica em $\frac{P'Q'}{PQ} = k$. Logo, a razão entre segmentos correspondentes nas duas pirâmides é sempre igual a k, o que demonstra a sua semelhança.

O que fizemos acima pode ser visto de maneira mais geral e transformado em um método para obter uma figura espacial semelhante a uma figura dada. Dado um ponto V do espaço e um número real k, a *homotetia* de centro V e razão k é a função σ que associa a cada ponto P do espaço o ponto P' sobre VP tal que $VP' = kVP$ (figura 7.20).

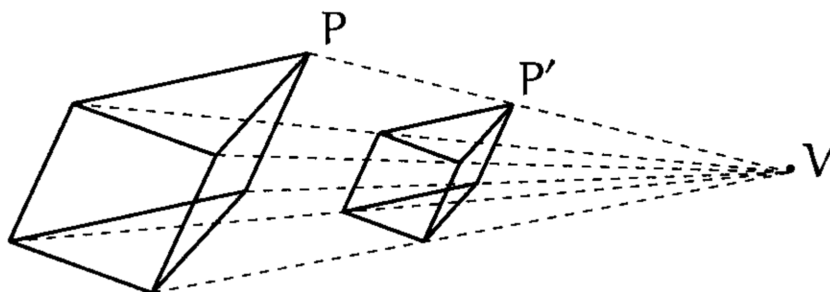


Fig. 7.20 - Figuras homotéticas.

Duas figuras F e F' são homotéticas quando existe uma homotetia σ tal que $\sigma(F) = F'$. Assim, as duas pirâmides do exemplo anterior são homotéticas. *Duas figuras homotéticas são sempre semelhantes*, pelo mesmo argumento utilizado acima: dados dois pontos P e Q em F, seus correspondentes P' e Q' em F' são tais que os triângulos $VP'Q'$ e VPQ são semelhantes na razão k.

7.9 Atividades em Sala de Aula

Muitas vezes o professor tem dificuldades em motivar o aluno para os conceitos iniciais de Geometria no Espaço. Sugerimos a seguir algumas estratégias para despertar um maior interesse por parte dos alunos.

Uma primeira recomendação é evitar apresentar o assunto já de forma completamente arrumada para o aluno. É importante construir a classificação da posição relativa de retas e planos com a participação dos alunos, apresentando exemplos provocativos como o da figura 7.1.

Deve-se procurar, também, buscar exemplos de planos e retas em diversas posições no espaço que cerca o aluno. Pode-se, por exemplo, convidar os alunos a obter exemplos de retas reversas dentro da sala de aula.

A apresentação precoce de figuras de interesse é uma outra forma de motivar o aluno e demonstrar a relevância dos conceitos. O aluno deve ser convidado a explorar as figuras, identificando retas e planos e determinando sua posição relativa.

É importante ilustrar casos de paralelismo em figuras bem conhecidas, como prismas e pirâmides.

Deve-se explorar bastante o conceito de semelhança, aproveitando para fazer uma revisão de semelhança de figuras planas. Atividades usando homotetia para reduzir ou ampliar figuras são também recomendadas.

Exercícios

1. A figura 7.21 abaixo representa uma ponte sobre uma estrada de ferro. Sejam α e β, respectivamente, os planos da pista da ponte e o do leito da estrada de ferro e sejam r e s as retas que representam o eixo da pista e um dos trilhos. Quais são as posições relativas de α, β, r e s?

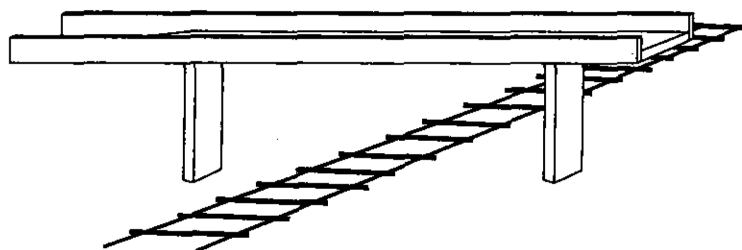


Figura 7.21

2. Quantos são os planos determinados por 4 pontos não coplanares?

3. Quantos planos distintos são determinados por um subconjunto dos vértices do paralelepípedo $ABCDEFGH$?

4. Qual a seção determinada em um paralelepípedo $ABCDEFGH$ pelo plano ABG?

5. Duas retas r e s são concorrentes em um ponto O. Fora do plano determinado por r e s tomamos um ponto P qualquer. Qual é a interseção do plano definido por r e P com o plano definido por s e P?

6. Sejam r e s duas retas reversas, A um ponto em r e B um ponto em s. Qual é a interseção do plano α definido por r e B com o plano β definido por s e A?

7. Sejam r e s duas retas reversas. Sejam A e B pontos distintos de r e C e D pontos distintos de s. Qual é a posição relativa das retas AC e BD?

8. Sejam r e s duas retas reversas e P um ponto qualquer do espaço. Diga como obter:

a) um plano contendo r e paralelo a s;
b) um par de planos paralelos contendo r e s, respectivamente;
c) uma reta passando por P e se apoiando em r e s.

9. Seja r uma reta secante a um plano α e P um ponto exterior a α. É sempre possível traçar uma reta que passa por P, encontra r e é paralela a α?

10. Se dois planos são paralelos a uma reta então eles são paralelos entre si. Certo ou errado?

11. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer do espaço (não necessariamente coplanares). Sejam M, N, P e Q os pontos médios de AB, BC, CD e DA, respectivamente. Mostre que $MNPQ$ é um paralelogramo. Use este fato para demonstrar que os três segmentos

que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro qualquer ABCD se encontram em um mesmo ponto.

12. Suponha que os planos α, β e γ têm exatamente um ponto em comum. Existe uma reta que seja simultaneamente paralela a α, β e γ?

13. Sejam α, β e γ três planos distintos. Mostre que as posições relativas possíveis dos planos são:

a) Os três planos são paralelos.

b) Dois deles são paralelos e o terceiro é secante a ambos, cortando-os segundo retas paralelas.

c) Os três planos se cortam segundo uma reta.

d) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas paralelas.

e) Os três planos se cortam dois a dois segundo três retas concorrentes; o ponto comum às três retas é o único ponto comum aos três planos.

14. Seja ABCD um paralelogramo. Pelos vértices A, B, C e D são traçadas retas não contidas no plano ABCD e paralelas entre si. Um plano α corta estas retas em pontos A', B', C' e D', situados no mesmo semi-espaço relativo ao plano de ABCD, de modo que $AA' = a, BB' = b, CC' = c$ e $DD' = d$. Mostre que $a + c = b + d$.

15. Por um ponto qualquer da aresta AB de um tetraedro qualquer ABCD é traçado um plano paralelo às arestas AC e BD. Mostre que a seção determinada por este plano no tetraedro é um paralelogramo.

16. Considere um paralelepípedo ABCDEFGH. Quais são as diversas formas possíveis para uma seção determinada no sólido por um plano contendo a aresta AB?

17. Seja ABCDEFGH um paralelepípedo tal que $AB = AD = AE = 6$. Estude as seções determinadas neste paralelepípedo pelos planos definidos pelos ternos de pontos (M, N, P) abaixo:

a) $M = A, N =$ ponto médio de CG e $P =$ ponto médio de DH

b) $M = A, N = C, P =$ ponto médio de FG
c) $M = A, N =$ ponto médio de CG e $P =$ ponto médio de FG
d) $M =$ ponto médio de $AE, N =$ ponto médio de $BC, P =$ ponto médio de GH

18. Mostre que duas retas distintas paralelas a uma mesma reta são paralelas entre si.

19. Mostre que, por um ponto dado, passa um único plano paralelo a um plano dado.

20. Sejam r e s do espaço concorrentes em P. Sejam r' e s' paralelas a r e s, respectivamente, traçadas por um ponto Q. Mostre que os ângulos formados por r e s são iguais aos ângulos formados por r' e s'.

21. Considere dois planos α e β. Qual é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos cujos extremos estão em α e β, respectivamente? Examine todas as possíveis posições relativas de α e β.

22. Dada uma reta r secante ao plano α e um ponto P exterior a r e a α, diga como construir um segmento cujos extremos estão em r e α cujo ponto médio seja P.

23. Dadas as retas reversas duas a duas r, s e t, encontrar uma reta que as encontre nos pontos R, S e T, respectivamente, de modo que S seja ponto médio de RT.

24. Uma câmera fotográfica rudimentar pode ser construída fazendo um pequeno furo em uma caixa, de modo que imagens de objetos sejam formadas na parede oposta e registradas em um filme, como ilustrado na figura 7.22.

Suponha que a câmara da figura tenha 10 cm de profundidade

a) Que dimensões terá a fotografia de uma janela de 3 m de comprimento e 1,5 m de largura, paralela ao plano do filme e situada a 6 m da câmera?

b) Se uma pessoa tem 1,75 m de altura e o filme usado é de 35 mm × 25 mm, a que distância mínima da câmera a pessoa deverá ficar para que possa ser fotografada de corpo inteiro?

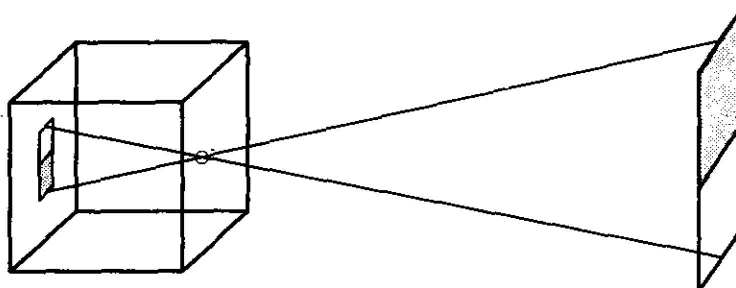


Figura 7.22

25. Verifique, através de um exemplo, que dois poliedros com arestas respectivamente proporcionais não são necessariamente semelhantes. Mostre, porém, que dois tetraedros de arestas respectivamente proporcionais são semelhantes.

26. A que distância da base de uma pirâmide de altura h deve ser conduzido um plano paralelo de modo que a área da seção determinada seja metade da área da base?

Capítulo 8

Perpendicularismo

Neste capítulo lidamos com outra noção fundamental: a de perpendicularismo envolvendo retas e planos. A idéia de perpendicularismo está presente na forma talvez mais intuitiva de passar do plano para o espaço: conduzindo uma reta perpendicular ao plano da Geometria Plana e introduzindo uma dimensão a mais.

8.1 Retas Perpendiculares

O conceito de perpendicularismo entre retas vem da Geometria Plana. Duas retas concorrentes são *perpendiculares* quando se encontram formando quatro ângulos iguais; cada um deles é chamado de *ângulo reto*. Naturalmente, esta definição continua valendo para retas concorrentes do espaço.

Para estender o conceito para um par de retas quaisquer, consideramos duas retas paralelas a elas conduzidas por um ponto arbitrário (figura 8.1).

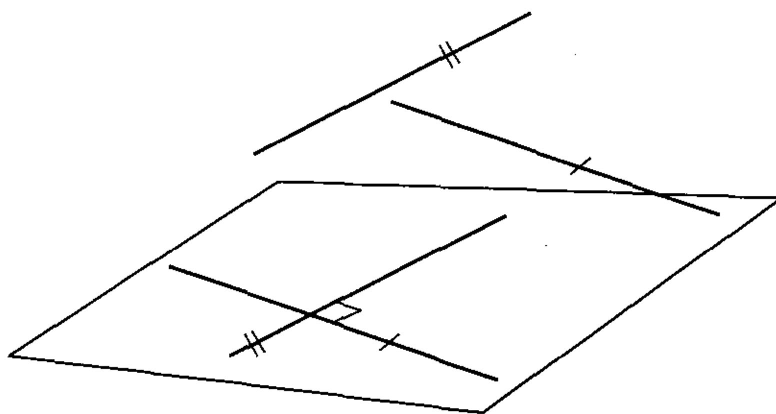


Fig. 8.1 - Retas ortogonais.

Quando essas retas são perpendiculares, dizemos que as retas dadas inicialmente são *ortogonais*. Note que, de acordo com esta definição, retas perpendiculares são um caso particular de retas ortogonais.

8.2 Retas e Planos Perpendiculares

A figura 8.2 ilustra o conceito de perpendicularismo entre reta e plano. Dizemos que *uma reta é perpendicular a um plano* quando ela é ortogonal a todas as retas desse plano. Isto equivale a dizer que ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo seu ponto de interseção com ele.

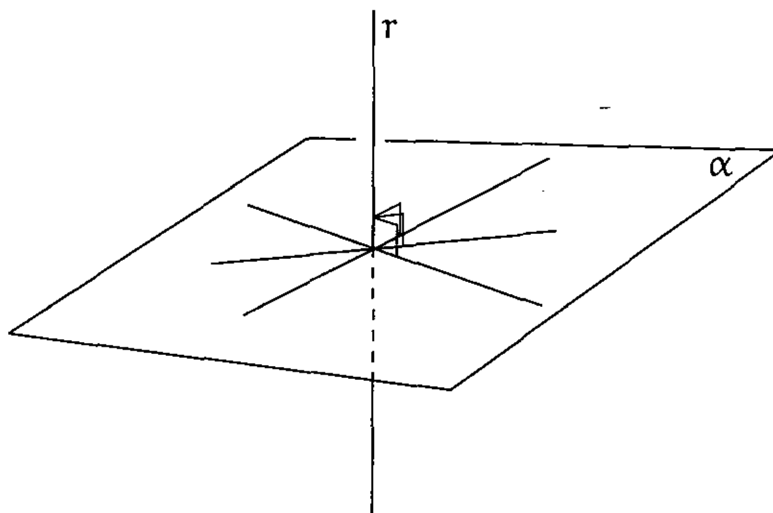


Fig. 8.2 - Reta perpendicular a plano.

Baseados em nossa experiência, sabemos que por qualquer ponto de um plano pode-se traçar uma única reta perpendicular a esse plano. Mas será que é possível mostrar tal fato a partir das propriedades básicas desenvolvidas nos capítulos anteriores?

A resposta é afirmativa. O ponto crucial é estabelecer as condições mínimas a serem obedecidas para que uma reta seja perpendicular a um plano. É interessante deixar que os alunos as descubram por si próprios, através da seguinte situação. Como conduzir uma reta perpendicular ao plano de uma mesa utilizando um pedaço de papel que tem pelo menos um bordo reto, conforme ilustrado na figura 8.3a?

A solução consiste em dobrar o papel ao longo deste bordo reto, desdobrá-lo parcialmente e repousar os lados do ângulo formado pelo bordo sobre a mesa, conforme mostra a figura 8.3b. A reta que contém o vinco do papel é perpendicular ao plano da mesa. Vejamos como interpretar esta construção. Quando dobramos o papel ao longo do bordo, fazemos com que os ângulos formados pelo vinco e por cada semi-reta determinada no bordo sejam congruentes. Como os dois ângulos somam 180°, cada um deles é reto. Logo, a reta que contém o vinco é perpendicular ao bordo do papel. Quando repousamos o papel sobre a mesa, a reta do vinco torna-se então perpendicular a duas retas concorrentes do plano da mesa.

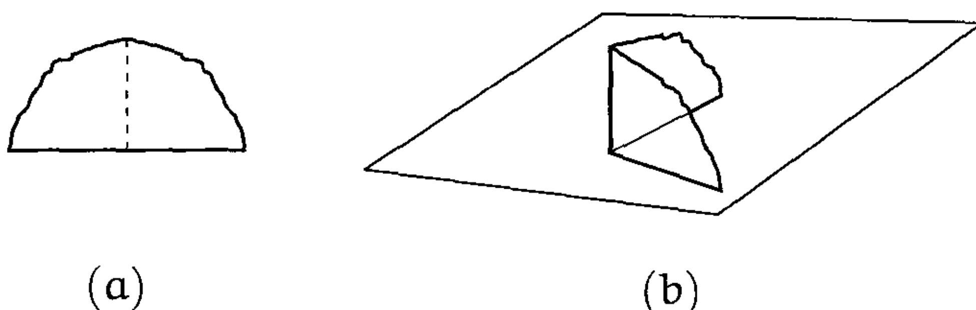


Fig. 8.3 - Como achar uma reta perpendicular a um plano.

O que a construção acima sugere é o seguinte teorema:

Teorema. Se uma reta é ortogonal a duas retas concorrentes de um plano ela é perpendicular ao plano (ou seja, ela forma ângulo reto com cada reta do plano).

Demonstração. Sejam s e t duas retas de α que se encontram em A, ambas ortogonais a r. Sem perda de generalidade, podemos supor que r passa por A (senão tomamos uma paralela a r passando por A) (figura 8.4). Vamos mostrar que toda reta u de α passando por A é perpendicular a r. Se u coincide com s ou t, então u é certamente perpendicular a r. Senão, tomemos uma reta v de α tal que seu ponto de interseção U com u esteja entre os pontos de interseção S e T com s e t. Em cada semiplano determinado por α tomemos pontos A_1 e A_2 tais que $AA_1 = AA_2$.

Os triângulos retângulos A_1AS e A_2AS são certamente iguais, já que $A_1A = A_2A$ e o cateto AS é comum. Logo, $A_1S = A_2S$. Analogamente, os triângulos A_1AT e A_2AT são iguais, daí resultando $A_1T = A_2T$. Examinando, então, os triângulos A_1ST e A_2ST, observamos que o lado ST é comum e os demais lados são respectivamente iguais. Portanto, estes triângulos são iguais. Mas da igualdade de A_1ST e A_2ST resulta também a igualdade de A_1SU e A_2SU (SU é comum, $A_1S = A_2S$ e os ângulos A_1SU e A_2SU são iguais). Logo, $A_1U = A_2U$ e, daí, os triângulos A_1AU e A_2AU são iguais, por possuírem lados respectivamente iguais. Mas isto acarreta a igualdade dos ângulos A_1AU e A_2AU. Como A_1, A e A_2 são colineares, cada um daqueles ângulos é necessariamente reto. Ou seja, u é perpendicular a r.

Fig. 8.4 - Condição para perpendicularismo de reta e plano.

Assim, provamos que toda reta de α passando por A é perpendicular a r e, portanto, que r e α são perpendiculares. À primeira vista, a estratégia usada na demonstração do teorema acima pode parecer artificial (como saber que deveríamos começar tomando pontos sobre r simétricos com relação a A?). Ela reflete, no entanto, a íntima relação entre perpendicularismo, congruência e simetria. O uso de pontos simétricos em relação a A permitiu o uso de congruência de triângulos para mostrar que r forma ângulos

iguais com uma reta arbitrária do plano, ou seja, que r é perpendicular a essa reta.

Com o auxílio do teorema acima, podemos, então, fazer duas construções fundamentais:

Construção do plano perpendicular a uma reta por um de seus pontos. Seja r uma reta e A um de seus pontos (figura 8.5). Tomemos dois planos distintos contendo r e, em cada um, tracemos a perpendicular a r passando por A. Estas duas retas determinam um plano, que certamente é perpendicular a r, já que r é perpendicular a duas retas concorrentes deste plano.

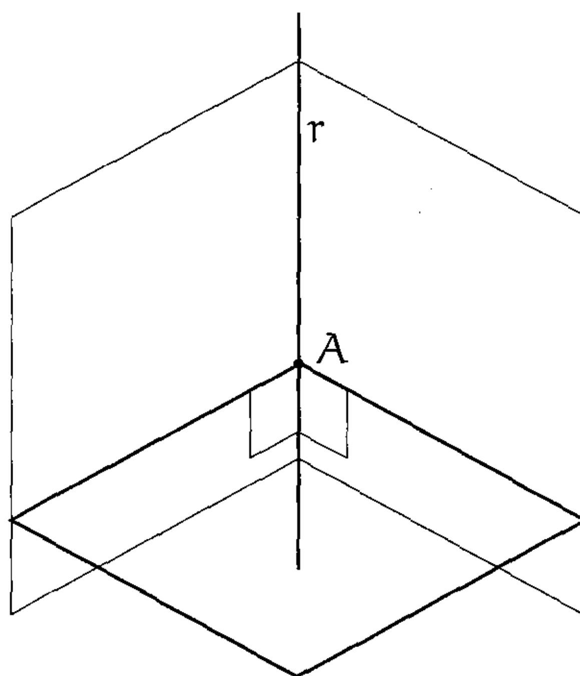


Fig. 8.5 - Construção de plano perpendicular a uma reta.

Construção da reta perpendicular a um plano por um de seus pontos. Consideremos um plano α e um ponto A em α. Tomemos duas retas concorrentes s e t, ambas passando por A e contidas em α. Utilizando a construção anterior, existem planos β e γ, contendo A e respectivamente perpendiculares a s e t. A reta r de interseção de β e γ é perpendicular a s e a t, por estar contida em planos respectivamente perpendiculares a cada uma delas. Logo, r é perpendicular a α.

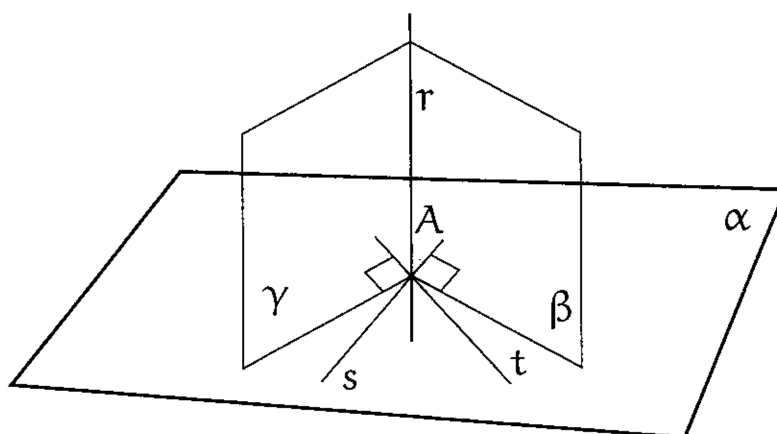


Fig. 8.6 - Construção de reta perpendicular a um plano.

Acima, mostramos como construir a *um* plano perpendicular a uma reta passando por um de seus pontos. Na verdade, aquele é o *único* plano perpendicular à reta passando pelo ponto dado. Da mesma forma, a reta perpendicular a um plano dado passando por um de seus pontos também é única. Outra observação é que não é preciso, nos teoremas acima, exigir que o ponto dado pertença à reta dada ou ao plano dado. Ou seja, por qualquer ponto do espaço passa um único plano perpendicular a uma reta dada e uma única reta perpendicular a um plano dado. Tudo isso é conseqüência dos seguintes fatos a respeito de retas e planos perpendiculares (veja o exercício 2).

- Se uma reta é perpendicular a um plano, toda reta paralela a ela é também perpendicular ao mesmo plano.
- Se um plano é perpendicular a uma reta, todo plano paralelo a ele é também perpendicular à mesma reta.
- Se duas retas distintas são perpendiculares ao mesmo plano, elas são paralelas entre si.
- Se dois planos distintos são perpendiculares à mesma reta, eles são paralelos entre si.

8.3 Construções Baseadas em Perpendicularismo de Reta e Plano

A noção de reta perpendicular a plano permite-nos acrescentar diversas figuras importantes à nossa coleção de figuras espaciais.

Como vimos na demonstração do teorema a respeito das condições suficientes para perpendicularismo de reta e plano, a idéia de perpendicularismo está estreitamente relacionada às idéias de simetria e congruência. Por essa razão, figuras construídas com auxílio de retas e planos perpendiculares são ricas em propriedades a serem exploradas.

Construção de prismas retos. *Prismas retos* são prismas obtidos tomando, para as arestas laterais, retas perpendiculares ao plano da base (figura 8.7). Em conseqüência, as faces laterais são retângulos. Há diversos casos particulares importantes. Quando a base é um polígono regular obtemos um prisma *regular*. Quando a base é um retângulo obtemos um *paralelepípedo retângulo* (ou *bloco retangular*), no qual cada face é um retângulo (assim, um paralelepípedo retângulo é um prisma reto onde qualquer face serve como base). Ainda mais especial é o caso do *cubo* – ou *hexaedro regular* –, paralelepípedo retângulo no qual cada face é um quadrado.

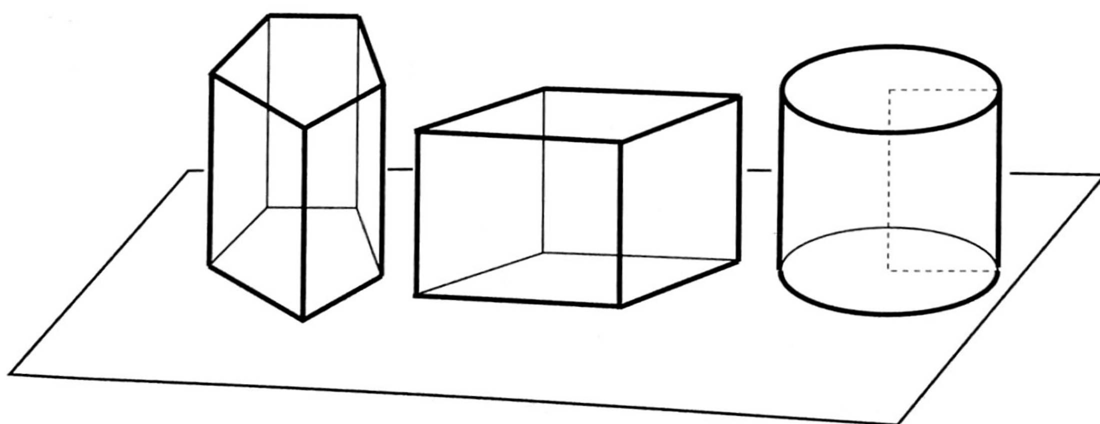


Fig. 8.7 - Um prisma hexagonal reto, um paralelepípedo retângulo, um cubo e um cilindro de revolução.

De modo análogo, definimos *cilindro reto* como um cilindro no qual as geratrizes são perpendiculares ao plano da base. Um caso particular importante é o *cilindro circular reto*, no qual a base é um círculo. A reta perpendicular aos planos das bases passando pelo centro do círculo é chamada de *eixo* do cilindro. Um cilindro circular reto também é chamado de *cilindro de revolução*, pois é o

sólido gerado quando um retângulo faz um giro completo em torno do eixo dado por um de seus lados.

Construção de pirâmides regulares. São construídas tomando um polígono regular $A_1A_2 \ldots A_n$ como base e escolhendo como vértice um ponto V situado sobre a perpendicular ao plano do polígono conduzida pelo seu centro O (figura 8.8). Os triângulos retângulos $VOA_1, VOA_2, \ldots, VOA_n$ são triângulos retângulos iguais, por possuírem catetos respectivamente iguais (VO é comum a todos e $OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n$, já que O é o centro do polígono). Em conseqüência $VA_1 = VA_2 = \cdots = VA_n$, o que faz com que as faces laterais sejam triângulos isósceles iguais.

Podemos fazer uma construção análoga tomando como base um círculo e como vértice um ponto situado sobre a perpendicular ao plano da base. A figura assim obtida é chamada de cone circular reto. A reta que contém o vértice e o centro da base é chamada de eixo do cilindro. Um cone circular reto também é chamado de *cone de revolução*, por ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno do eixo dado por um dos catetos.

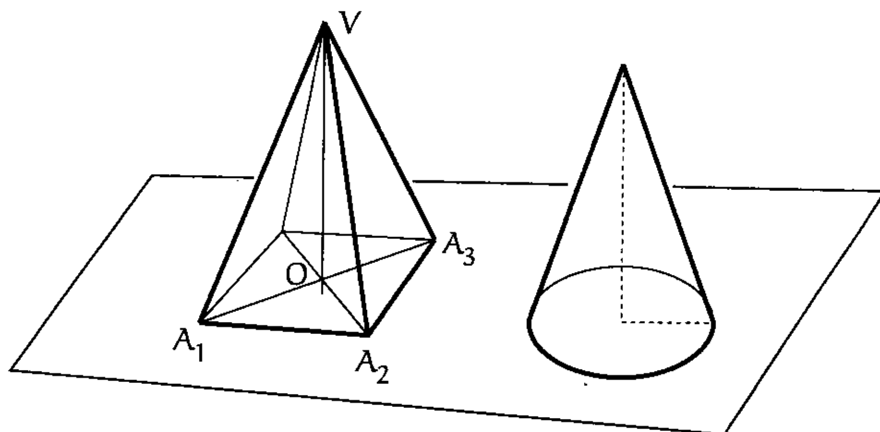


Fig. 8.8 - Uma pirâmide quadrangular regular e um cone de revolução.

Construção de um tetraedro regular. Considermos uma pirâmide triangular regular de base ABC e vértice V. Um *tetraedro regular* é obtido escolhendo o vértice V (sobre a perpendicular ao plano da base traçada por seu centro O) de modo que as arestas laterais VA, VB e VC sejam iguais às arestas AB, AC e BC da base

(figura 8.9). As faces da pirâmide assim obtida são triângulos equiláteros iguais. Além disso, se por A tomamos a perpendicular ao plano de VBC, que corta este plano em P, os triângulos retângulos APB, APV e APC são iguais, já que suas hipotenusas são iguais e o cateto AP é comum a todos os três. Assim, temos PB = PC = PV. Logo, P é o centro do triângulo equilátero VBC, o que faz com que a pirâmide seja regular qualquer que seja a face tomada como base.

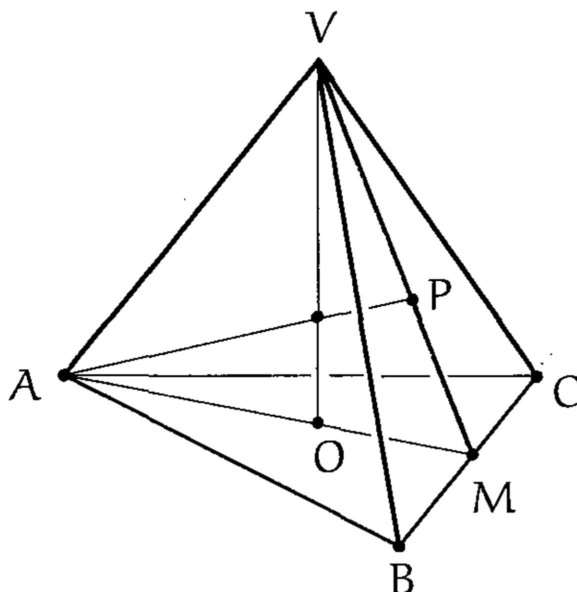


Fig. 8.9 - Um tetraedro regular.

A figura sugere que as retas VO e AP (isto é, as retas perpendiculares a duas faces do tetraedro regular traçadas pelo vértice oposto a cada uma destas faces) sejam coplanares. De fato isto ocorre. Consideremos o plano α determinado pela reta VO e pelo vértice A. Este plano corta o plano da base ABC segundo a reta AO. Mas como ABC é um triângulo equilátero de centro O, AO corta o lado BC em seu ponto médio M. Logo, a altura VM da face VBC está contida no plano α; em particular, o ponto P, que é o centro de VBC, está neste plano. Logo, a reta VP está contida em α, o que mostra que VP e AO são concorrentes. Como os pontos de VO são equidistantes de A, B e C e os pontos de AP são equidistantes de V, B e C, o ponto de interseção de VO e AP é um ponto equidistante dos quatro vértices do tetraedro, chamado de *centro* do tetraedro.

O argumento acima mostra, na realidade, que as quatro perpendiculares traçadas de cada vértice à face oposta passam todas pelo ponto O.

Construção de um octaedro regular. Um octaedro regular pode ser construído a partir de três segmentos iguais e mutuamente perpendiculares AB, CD e EF que se cortam no ponto médio O de cada um deles (figura 8.10). Os segmentos definidos por estes pares de pontos (exceto os que definem os segmentos originais) são todos iguais. Traçando todos estes segmentos obtemos um poliedro com oito faces triangulares regulares, chamado de *octaedro regular*. Um octaedro regular pode ser também obtido tomando duas pirâmides quadrangulares regulares iguais em que as faces laterais são triângulos equiláteros e justapondo estas pirâmides através de suas bases.

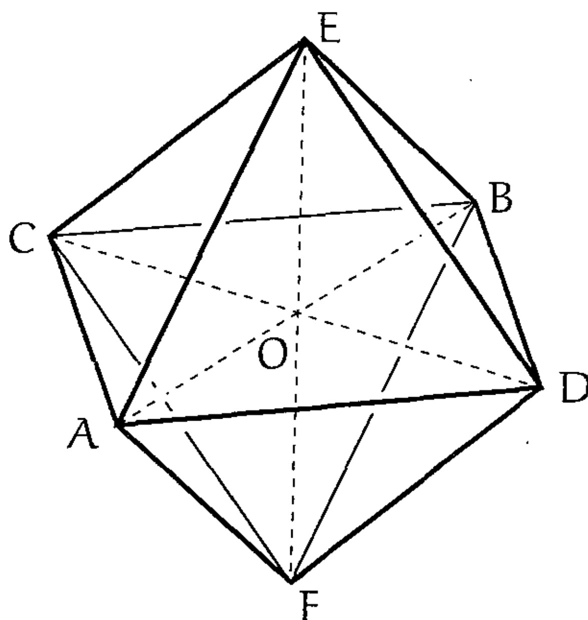


Fig. 8.10 - Um octaedro regular.

O tetraedro regular, o hexaedro regular e o octaedro regular são exemplos de poliedros regulares. Um poliedro regular é um poliedro em que todas as faces são polígonos regulares iguais e todos os vértices são incidentes ao mesmo número de arestas. Como veremos posteriormente, é possível demonstrar que, além dos três poliedros regulares apresentados acima, existem apenas dois ou-

tros: o *dodecaedro regular*, com 12 faces pentagonais, e o *icosaedro regular*, com 20 faces triangulares.

Projeções ortogonais. A projeção ortogonal de um ponto P do espaço sobre um plano α é o ponto P' em que a perpendicular a α traçada por P corta α. A projeção ortogonal de uma figura qualquer F é obtida projetando-se cada um de seus pontos.

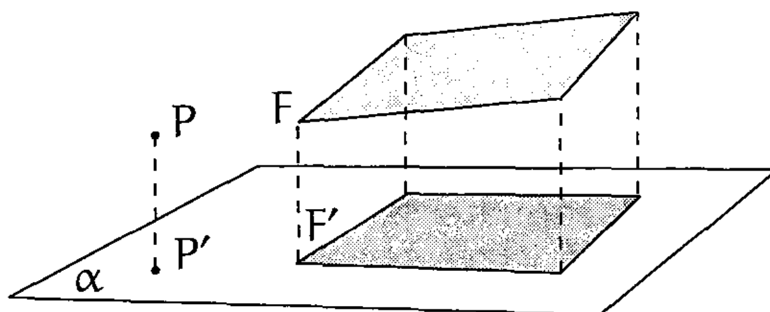


Fig. 8.11 - Projeção ortogonal.

Uma ou mais projeções ortogonais são freqüentemente utilizadas como forma de representar figuras espaciais no plano. Em Desenho Técnico, por exemplo, é comum representar sólidos (que podem ser, por exemplo, peças mecânicas) através de três *vistas ortográficas*: frontal, topo e perfil, que são o resultado de projetar as figuras em três planos definidos dois a dois por três eixos mutuamente perpendiculares. A vista frontal, por exemplo, mostra como um observador situado à frente do objeto e infinitamente distante do objeto, o veria. As demais vistas têm interpretações análogas.

A figura 8.12 mostra um sólido e suas vistas. Nestas vistas são desenhadas as projeções ortogonais das arestas do sólido. Observe que alguns segmentos são representados em tracejado. Isto significa que eles são obscurecidos por alguma face do sólido (isto é, existe algum ponto do objeto, situado mais próximo do observador, cuja projeção está sobre o segmento).

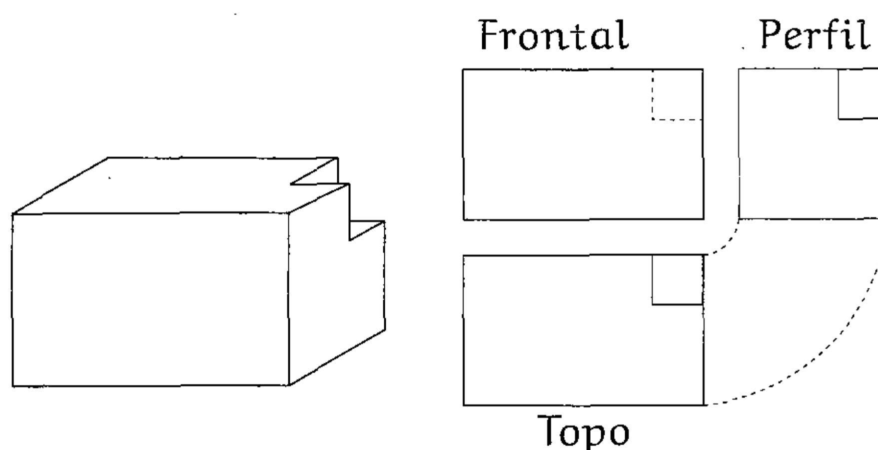


Fig. 8.12 - Um sólido e suas vistas.

Pedir que o aluno desenhe vistas de sólidos é uma excelente forma de desenvolver sua visão especial. Um exercício ainda mais interessante é o de resgatar um sólido a partir de suas vistas.

Simetria e reflexão. O *simétrico* de um ponto P em relação a um plano α é o ponto P' obtido através da seguinte construção (figura 8.13). Conduzimos por P a reta perpendicular a α, que corta α em Q. O ponto P' é o ponto sobre o prolongamento de PQ tal que $QP' = PQ$ (isto é, P' é o simétrico de P em relação a Q). O ponto resultante P' pode ser interpretado como sendo a imagem do ponto P refletida em um espelho plano coincidente com α.

Este é um bom momento para observar que também na Geometria (como em toda a Matemática), podemos fazer bom uso do conceito de função. Se designamos por E o conjunto dos pontos do espaço, a função $R: E \to E$ que associa a cada ponto P do espaço o seu simétrico P' em relação a α é chamada de *simetria* ou *reflexão* em torno de α. Funções que associam pontos do espaço a pontos do espaço são muitas vezes chamadas de transformações do espaço. Reflexões são exemplos de *isometrias*, isto é, de transformações do espaço que têm a propriedade de que a distância entre as imagens de dois pontos quaisquer é igual à distância entre os dois pontos (dizemos, por esse motivo, que isometrias preservam distâncias). O livro "Isometrias", de Elon Lages Lima, da Coleção do Professor de Matemática da SBM, é uma ótima referência para um estudo

da Geometria sob o ponto de vista das transformações do espaço.

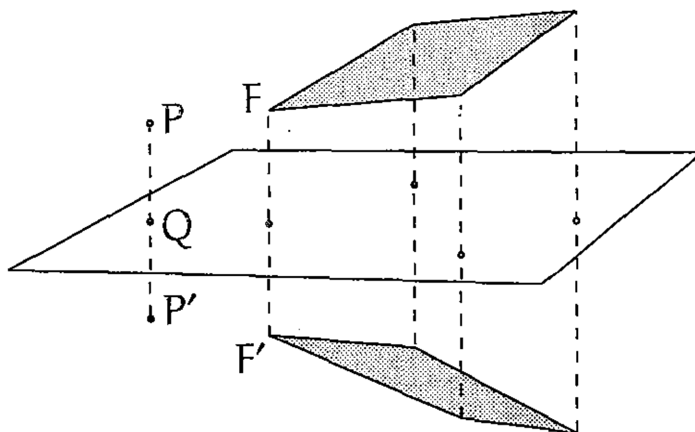


Fig. 8.13 - Simetria em relação a um plano.

Sistema de coordenadas tridimensionais. Um sistema de coordenadas para o espaço é construído a partir de três eixos mutuamente perpendiculares e com uma origem comum. Para construir um tal sistema, basta tomar duas retas perpendiculares contidas em um certo plano e conduzir a reta perpendicular a este plano passando pelo ponto de interseção das retas. As coordenadas de um ponto P qualquer do espaço são obtidas através da interseção com cada eixo do plano que passa por P e é perpendicular ao eixo. Isto também equivale a obter a projeção ortogonal de P sobre os planos definidos por cada par de eixos e, a seguir, projetar os pontos obtidos sobre cada eixo.

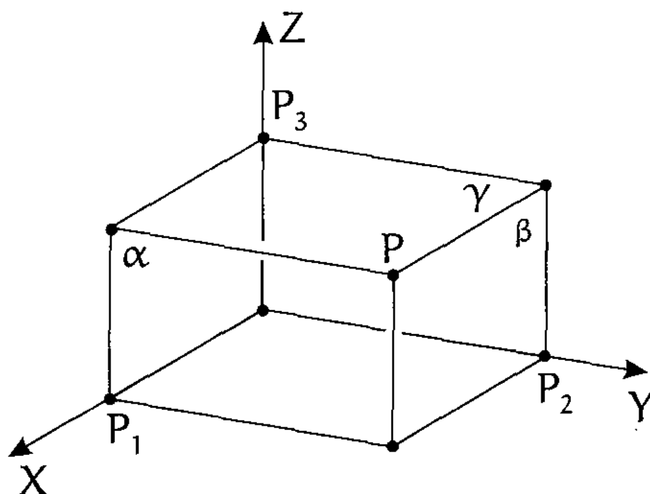


Fig. 8.14 - Sistema de coordenadas tridimensionais.

8.4 Planos Perpendiculares

Tomemos dois planos secantes α e β e tracemos um plano γ perpendicular à sua reta r de interseção, que corta α e β segundo as retas s e t. O ângulo entre s e t não depende da posição escolhida para γ (todos os planos perpendiculares a r são paralelos entre si e, portanto, cortam α e β segundo retas respectivamente paralelas). Quando s e t formam um ângulo reto, dizemos que os planos α e β são *perpendiculares* (figura 8.15).

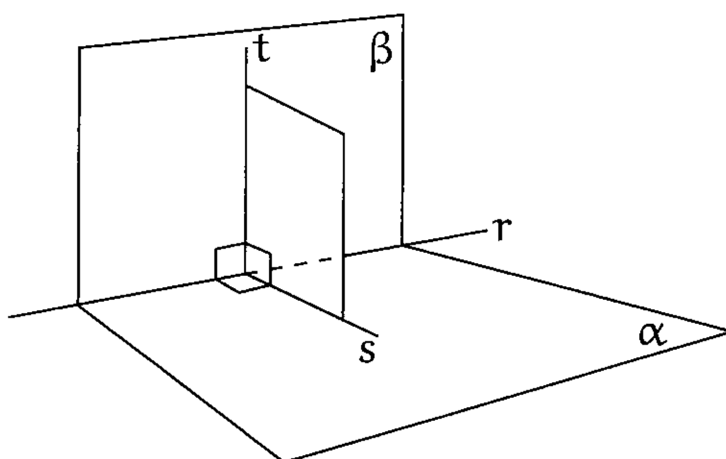


Fig. 8.15 - Planos perpendiculares.

Note que se α e β são perpendiculares então a reta r de α é perpendicular às retas s e t de β. Logo, r é uma reta de α que é perpendicular a β. Na verdade a existência em um plano de uma reta perpendicular a um outro é condição necessária e suficiente para que os planos sejam perpendiculares.

Teorema. Dois planos α e β são perpendiculares se e somente se um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

Demonstração. Se α e β são perpendiculares então certamente existe uma reta de α perpendicular a β, conforme explicamos no parágrafo anterior. Por outro lado, suponhamos que uma reta r de α seja perpendicular a β (figura 8.16). O plano α corta β segundo uma reta t, que é perpendicular a r. Pelo ponto de interseção de r e t traçamos a reta s, contida em β e perpendicular a t. O plano definido por r e s é perpendicular a t, já que contém duas

retas que lhe são perpendiculares. Logo, o ângulo formado por α e β é, por definição, o ângulo formado por r e s. Mas r e s são perpendiculares, já que r é perpendicular a β. Portanto, α e β são de fato perpendiculares.

Nos exemplos vistos no final da seção anterior aparecem vários pares de planos perpendiculares. Em cada caso, o argumento para justificar o perpendicularismo entre os planos consiste em identificar uma reta em um dos planos que seja perpendicular ao outro e aplicar o teorema anterior.

Assim, as faces laterais de um prisma reto são perpendiculares ao plano da base, já que cada face lateral contém uma aresta lateral perpendicular à base. O plano contendo as alturas VO e AP do tetraedro regular VABC é perpendicular às faces ABC e VBC, já que as alturas são perpendiculares às respectivas bases. Os planos definidos por cada par de eixos em um sistema de eixos ortogonais tridimensional são mutuamente perpendiculares, já que cada um desses planos contém um eixo que é perpendicular a cada um dos outros dois e, em conseqüência, ao plano formado por eles.

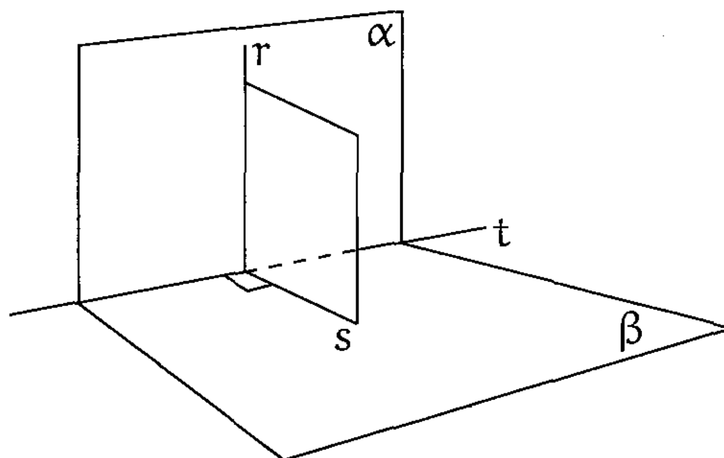


Fig. 8.16 - Critério de perpendicularismo de planos.

8.5 Atividades em Sala de Aula

O professor pode explorar o perpendicularismo de retas e planos no mundo que cerca o aluno: paredes, encontro de paredes, etc.

Devem ser feitos exercícios com vistas de objetos tridimensionais, quer pedindo aos alunos que desenhem as vistas de um objeto, quer pedindo que eles reconheçam objetos a partir de suas vistas.

Exercícios

1. É verdade que duas retas distintas ortogonais a uma terceira são sempre paralelas entre si?

2. Demonstre as seguintes propriedades:

a) Seja r uma reta perpendicular ao plano α. Toda reta paralela a r é perpendicular a α; todo plano paralelo a α é perpendicular a r.

b) Duas retas distintas perpendiculares ao mesmo plano são paralelas entre si. Dois planos distintos perpendiculares à mesma reta são paralelos entre si.

3. O triângulo ABC, retângulo em A, está contido em um plano α. Sobre a perpendicular a α traçada por C tomamos um ponto D. Por C traçamos, por sua vez, as perpendiculares CE e CF a AD e BD, respectivamente. Mostre que:

a) AB é perpendicular a AD

b) CE é perpendicular a EF

c) DF é perpendicular a EF

4. Seja r uma reta do espaço e P um ponto exterior a r. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P aos planos que contém r?

5. Que poliedro tem por vértices os centros das faces de um tetraedro regular? de um cubo? de um octaedro regular?

6. Sejam VA, VB e VC três segmentos mutuamente perpendiculares. Mostre que a projeção de V sobre o plano ABC é o ortocentro do triângulo ABC.

7. Mostre que dois planos são perpendiculares se e só se duas

retas respectivamente perpendiculares a cada um deles são ortogonais.

8. Se um plano α contém uma reta perpendicular a um plano β, então o plano β contém uma reta perpendicular ao plano α. Certo ou errado?

9. Dada uma reta r e um plano α, diga se é sempre possivel construir um plano perpendicular a α contendo r.

10. Mostre que um plano é perpendicular a dois planos secantes se e somente se ele é perpendicular à reta de interseção dos dois planos.

11. Em um cubo ABCDEFGH mostre que os planos diagonais ABHG e EFDC são perpendiculares.

12. Desenhe as vistas frontal, superior e de perfil dos sólidos abaixo.

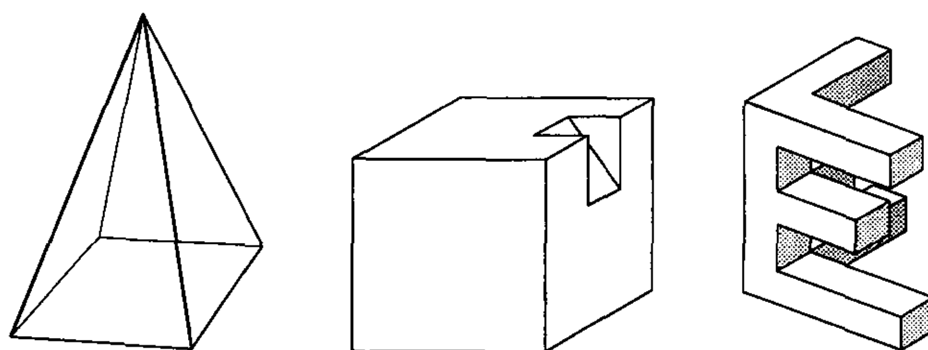


Figura 8.17

13. Desenhe um sólido cujas vistas frontal, superior e de perfil sejam as dadas a seguir.

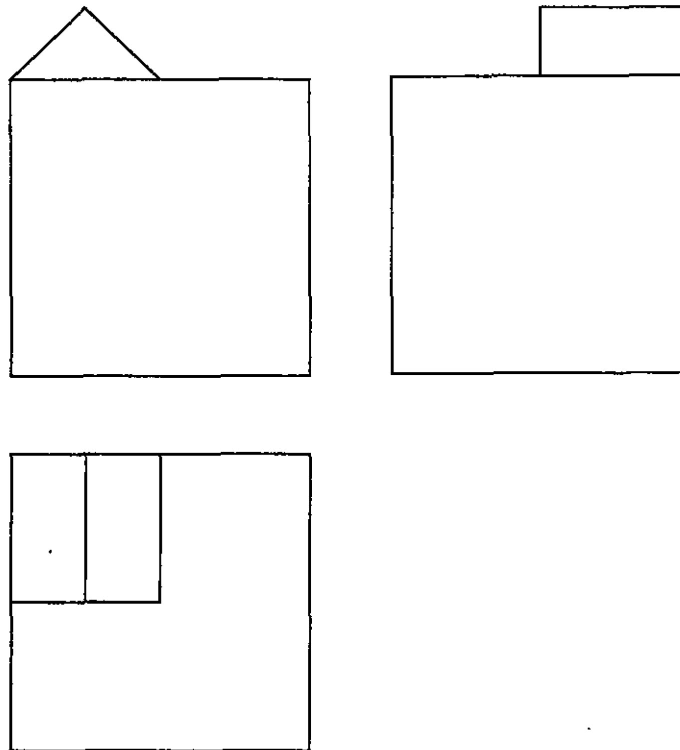


Figura 8.18

14. A figura 8.19 abaixo representa as vistas frontal e superior de um sólido. Que sólidos você consegue imaginar que tenham essas vistas? Para cada caso, forneça a vista de perfil.

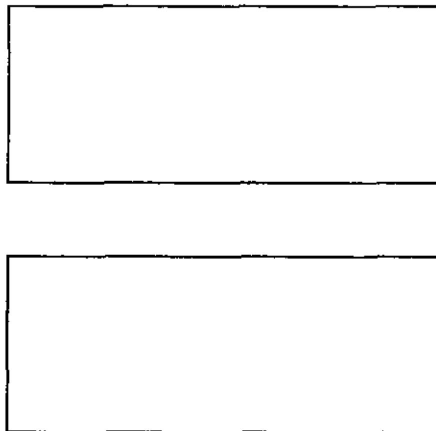


Figura 8.19

15. Dizemos que um plano α é um plano de simetria de uma figura F quando a imagem de F pela reflexão em torno de α é igual a F. Encontre os planos de simetria (se existirem) das seguintes figuras

a) cubo
b) tetraedro regular
c) pirâmide quadrangular regular
d) cilindro de revolução
e) cone de revolução

16. Dado um ponto $P = (x, y, z)$ em um sistema de coordenadas ortogonais, encontre as coordenadas:

a) da projeção de P no plano xy
b) da projeção de P no eixo Oz
c) do simétrico de P em relação ao plano xz

17. A figura 8.20 abaixo mostra a planta de um quarto, com pé direito igual a 3 m. Deseja-se instalar um fio conectando uma lâmpada, localizada no centro do teto, ao interruptor, situado a 80 cm de altura, junto à porta indicada na planta (cuja altura é 1,95 m).

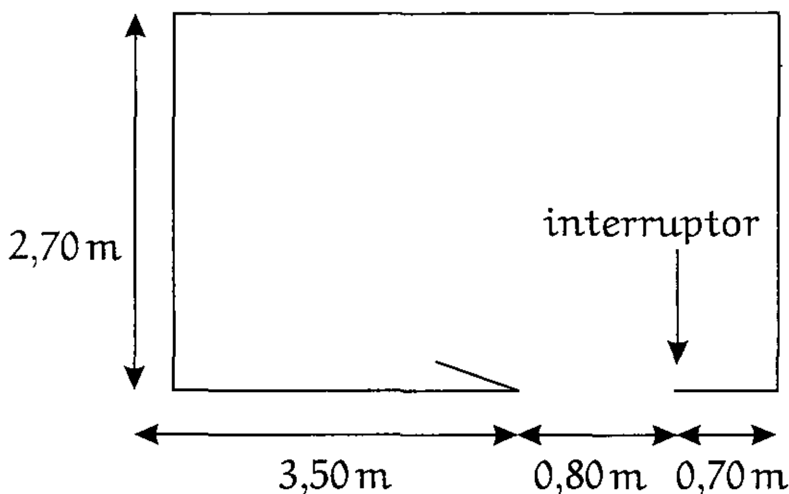


Figura 8.20

Determine o comprimento de fio necessário nos seguintes casos:

a) O fio deve se manter, tanto no teto como na parede, paralelo a uma das três direções principais.
b) O fio, na parede, deve ficar colocado segundo a vertical.
c) O fio pode ficar em qualquer posição na parede e no teto.

Capítulo 9

Medindo Distâncias e Ângulos

O objetivo deste capítulo é colocar em prática os conceitos desenvolvidos nas seções anteriores para estudar problemas métricos no espaço, envolvendo cálculo de ângulos e distâncias. É importante destacar que praticamente todas as ferramentas que utilizaremos vêm da Geometria Plana. O segredo, na maior parte dos casos, está em identificar um ou mais planos contendo elementos relevantes dos problemas.

9.1 Distância Entre Dois Pontos

A distância entre dois pontos A e B é simplesmente a medida do segmento AB. No plano, a distância entre dois pontos é freqüentemente obtida utilizando o Teorema de Pitágoras. Isto ocorre porque muitas vezes dispomos das medidas das projeções de um segmento segundo duas direções perpendiculares. Esta situação freqüentemente ocorre também no espaço. Novamente, a ferramenta a utilizar é o Teorema de Pitágoras.

Diagonal de um paralelepípedo. Consideremos o problema de calcular a diagonal $BH = d$ de um paralelepípedo retângulo $ABCDEFGH$ de arestas $AB = a, AD = b$ e $AE = c$ (figura 9.1). Resolvemos o problema utilizando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ABD e BDH (este segundo triângulo é retângulo porque BH é perpendicular ao plano da base e, assim, perpendicular à reta BD que está contida nesta base).

Temos: $BD^2 = a^2 + b^2$ (no triângulo ABD) e $d^2 = BD^2 + c^2$ (no triângulo BDH). Logo, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Em particular, a diagonal de um cubo de aresta a mede $d = a\sqrt{3}$.

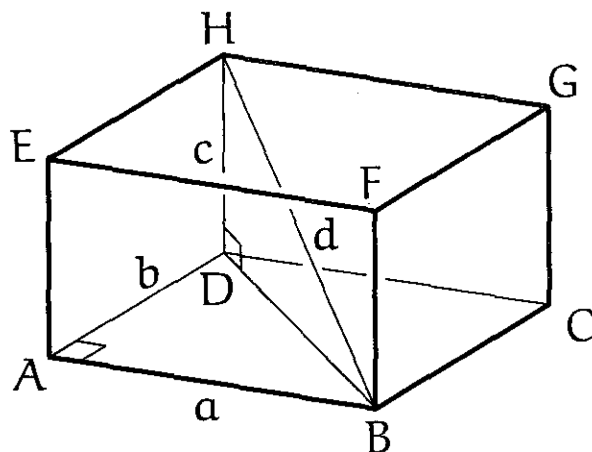


Fig. 9.1 - Diagonal de um paralelepípedo.

Plano mediador. Qual é o lugar geométrico dos pontos do espaço que são equidistantes de dois pontos dados A e B?

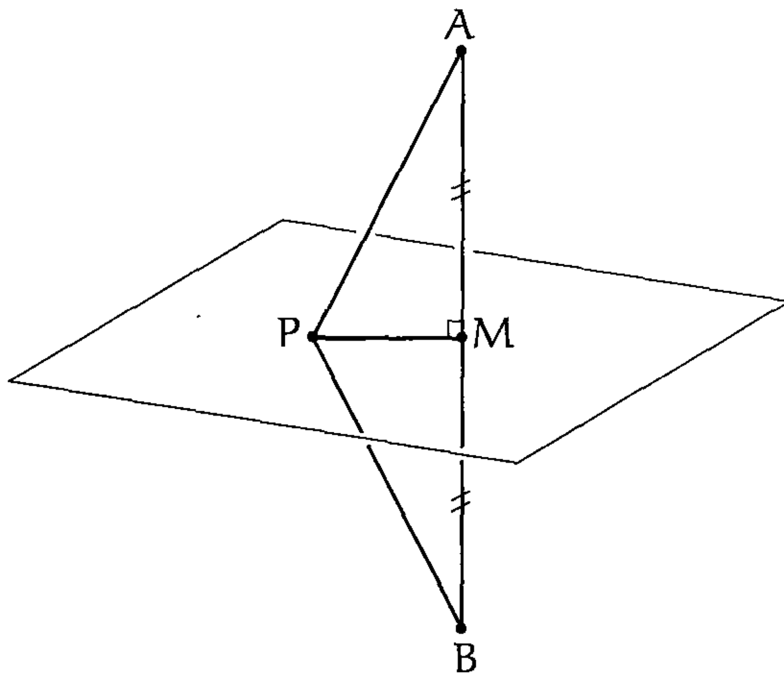


Fig. 9.2 - O plano mediador.

Sabemos que, no plano, o conjunto dos pontos equidistantes de A e B é a reta mediatriz de AB; isto é, a perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio M. A situação é análoga no espaço.

Um ponto P do espaço é equidistante de A e B se e somente se PM é perpendicular a AB (figura 9.2). De fato, se PM é perpendicular a AB, os triângulos retângulos PMA e PMB são iguais, por possuírem um cateto comum PM e catetos iguais MA e MB; assim, PA = PB. Por outro lado, se PA = PB, então os triângulos PAM e PBM são iguais, por possuírem lados respectivamente iguais; logo, os ângulos PMA e PMB são iguais e, portanto, retos. Provamos, então, que os pontos do espaço equidistantes de A e B são todos aqueles pontos P tais que a reta PM é perpendicular a AB. Mas estes são exatamente os pontos do plano que passa por M e é perpendicular a AB; este é o chamado *plano mediador* de AB.

9.2 Distância de Ponto a Plano

A distância de um ponto P a um plano α é definida como o comprimento do segmento de perpendicular traçada de P a α. Note que se R é um outro ponto qualquer do plano, o triângulo PQR é retângulo e tem PQ como cateto e PR como hipotenusa. Assim, o comprimento da perpendicular PQ é menor que o comprimento de qualquer oblíqua PR.

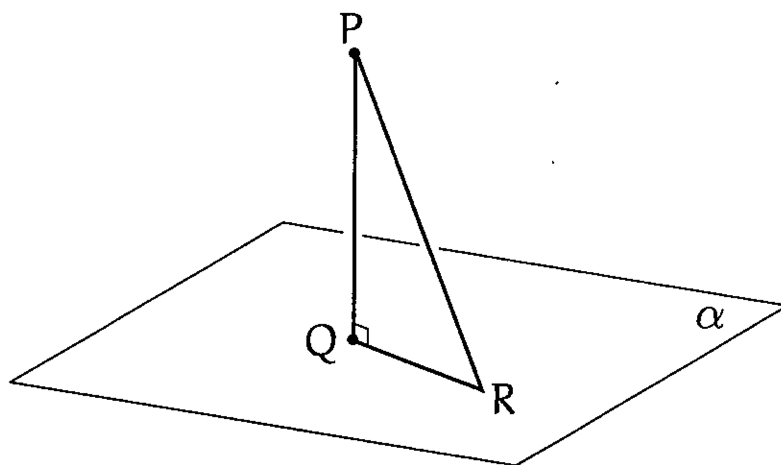


Fig. 9.3 - Distância de ponto a plano.

Se uma reta r é paralela a um plano (figura 9.4a), todos os seus pontos estão a igual distância do plano. De fato, se de dois pontos P_1 e P_2 da reta r paralela a α traçamos as perpendiculares P_1Q_1 e P_2Q_2 a α, obtemos um retângulo $P_1P_2Q_2Q_1$. Logo, $P_1Q_1 = P_2Q_2$.

Analogamente, se β é um plano paralelo a α, todos os seus pontos estão à mesma distância d de α (figura 9.4b). O número d é a distância entre os planos α e β. Note que d é igual ao comprimento do segmento determinado pelos planos em qualquer reta perpendicular a ambos. Note também que qualquer segmento de extremos em α e β tem comprimento maior do que ou igual a d.

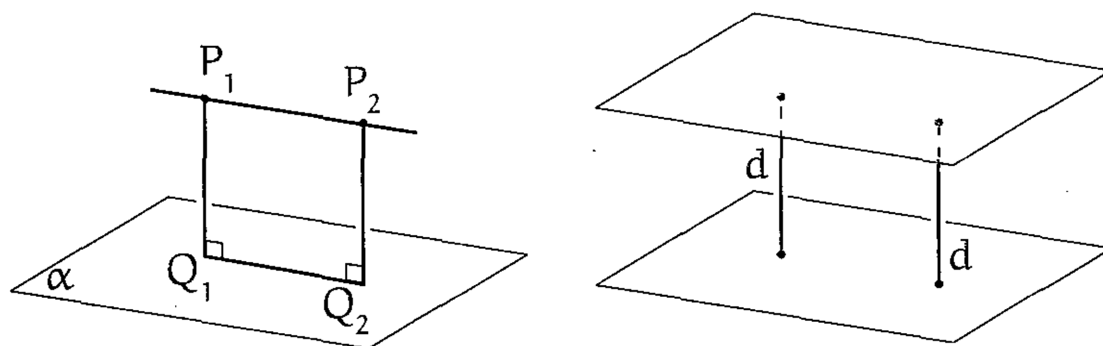


Fig. 9.4 - Paralelismo e distância.

Exemplo. Em um tetraedro regular ABCD de aresta a, qual é a distância do vértice A ao plano BCD? (Isto é, qual é altura do tetraedro?)

Empregamos, mais uma vez o teorema de Pitágoras. Seja H a projeção de A sobre o plano BCD (figura 9.5). Já vimos antes que o ponto H é o centro do triângulo equilátero BCD. Examinemos o triângulo retângulo AHB. O lado AB é a aresta do tetraedro; logo, $AB = a$. O lado HB é o raio do círculo circunscrito no triângulo equilátero de lado a; logo

$$HB = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Temos, então:

$$AH^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = a^2 \quad \text{e, daí,} \quad AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

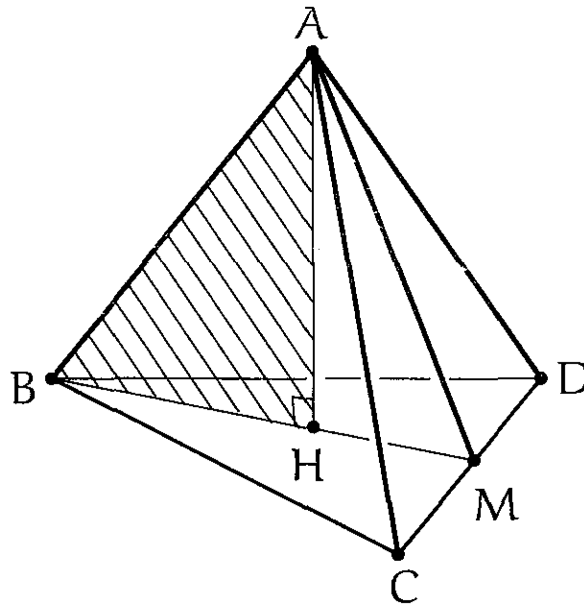


Fig. 9.5 - Altura do tetraedro regular.

Na figura representamos não somente o triângulo AHB mas a seção completa (o triângulo ABM) determinada no tetraedro regular pelo plano que o contém. O ponto M é o ponto médio da aresta CD. No triângulo ABM aparecem quase todos os elementos métricos importantes do tetraedro regular. Além da altura do tetraedro (que é a altura relativa a A do triângulo ABM), nele aparecem o ângulo entre duas faces, o ângulo entre uma aresta e uma face, a distância entre arestas opostas e os raios das esferas inscrita, circunscrita e tangente às arestas do tetraedro.

9.3 Distância de Ponto a Reta

Dado um ponto P e uma reta r do espaço, o ponto Q em que a reta r corta o plano perpendicular a r passando por P é chamado de *projeção ortogonal* de P sobre r (figura 9.6). O comprimento do segmento PQ é a *distância* de P a r. Quando P não pertence à reta r, os pontos P e Q são distintos e PQ é a *única* reta perpendicular a r traçada por P (P e r definem um único plano e, neste plano, PQ é a única perpendicular a r passando por P). Se R é um outro ponto qualquer de r, o triângulo PQR tem hipotenusa PR e cateto PQ; logo $PQ < PR$ (isto é, o comprimento da perpendicular é menor que o comprimento de qualquer oblíqua).

Assim, o cálculo da distância de um ponto a uma reta envolve o traçado da perpendicular à reta passando pelo ponto. Uma situação muito comum é aquela onde a reta r esteja situada sobre um "plano de referência" (por exemplo, o plano do chão). Nestas situações, é muitas vezes desejável que a construção da reta perpendicular se apoie em elementos deste plano de referência. Isto se torna simples com o auxílio do chamado Teorema das Três Perpendiculares.

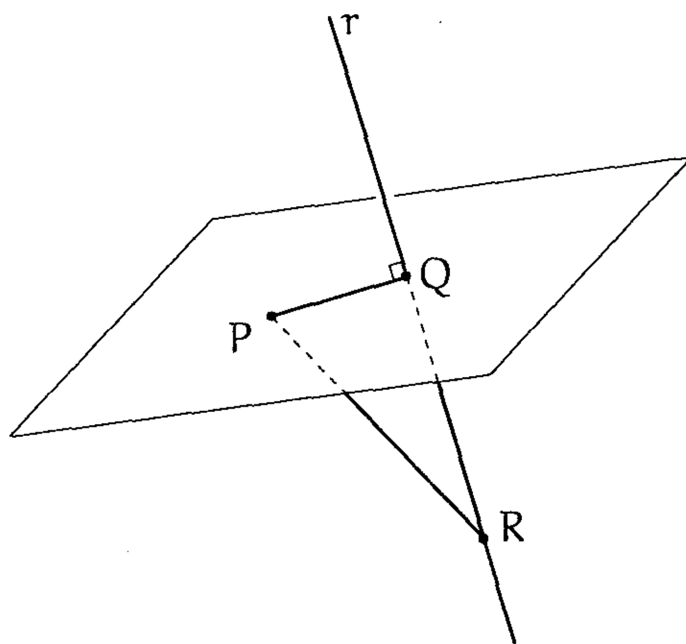


Fig. 9.6 - Distância de ponto a reta.

Teorema. Se por um ponto P traçamos a perpendicular PP' ao plano α e por um ponto qualquer Q de α traçamos a reta r perpendicular a $P'Q$, então a reta PQ é perpendicular a r.

Demonstração. Basta observar que as retas PP' e $P'Q$ são ambas ortogonais a r, já que PP' é perpendicular a um plano contendo r e $P'Q$ é perpendicular a r. Logo, o plano definido por essas retas é perpendicular a r e, portanto, a reta PQ desse plano é perpendicular a r.

Observe que a distância de P a r (isto é, o comprimento do segmento PQ) pode ser calculada com o auxílio do Teorema de Pitágoras, uma vez conhecidos os comprimentos dos segmentos

PP′ (distância de P a α) e P′Q (distância de P′ à reta r). Em muitos problemas práticos, estas duas últimas distâncias são fáceis de calcular, bastando escolher sabiamente o "plano de referência" contendo r.

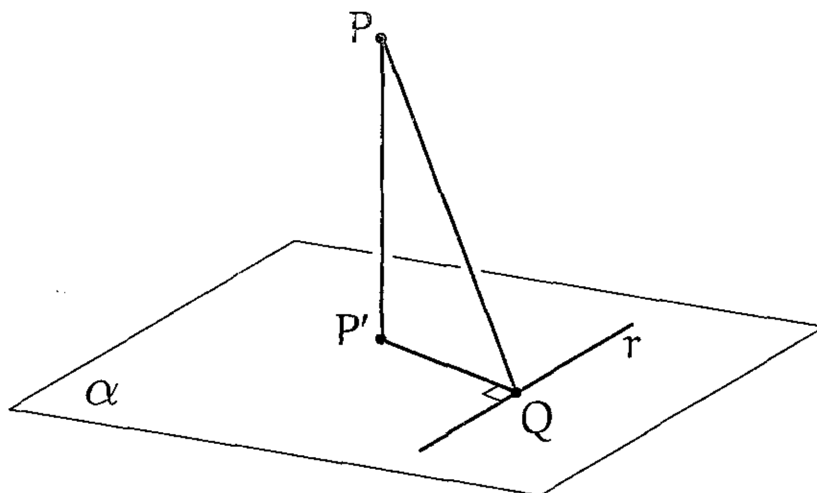


Fig. 9.7 - Teorema das Três Perpendiculares.

Exemplo. Considere um paralelepípedo retângulo ABCDEFGH em que $AB = 15$, $AD = 20$ e $AE = 16$ (figura 9.8). Qual a medida do menor segmento que liga o vértice E a um ponto da reta BD?

A perpendicular baixada de E ao plano ABCD corta esse plano em A; daí, traçamos a perpendicular AM a BD. Pelo teorema das três perpendiculares, EM é perpendicular a BD e é, portanto, o menor segmento que liga E a BD. Para calcular seu comprimento, trabalhamos em dois triângulos retângulos. No triângulo ABD, conhecemos os catetos $AB = 15$ e $AD = 20$; daí, obtemos a hipotenusa $BD = 25$ e a altura

$$AM = \frac{15 \times 20}{25} = 12.$$

No triângulo EAM são conhecidos os catetos $EA = 16$ e $AM = 12$. Daí, obtemos a hipotenusa $EM = 20$.

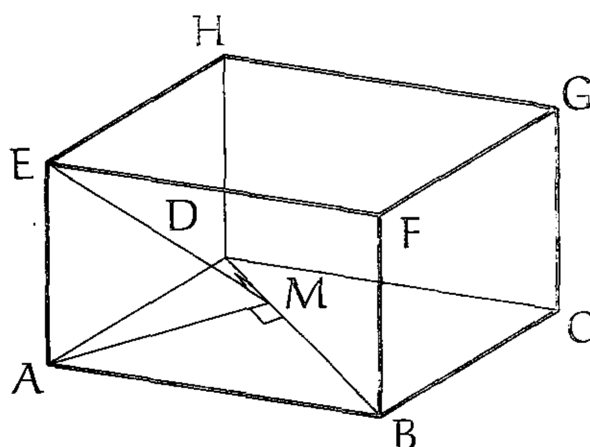


Figura 9.8

9.4 Distância Entre Retas Reversas

Vimos acima diversos casos em que definimos a distância entre duas figuras – isto é, dois conjuntos de pontos – do espaço. Todos estes casos são situações particulares abrangidas pela seguinte definição: dadas duas figuras F_1 e F_2, definimos a distância entre F_1 e F_2 como o comprimento do menor segmento que tem extremos em F_1 e F_2. Por exemplo, a distância de um ponto a um plano foi definida de modo a ser, de fato, o comprimento do menor segmento com um extremo no ponto dado e outro no plano.

Vamos empregar esta definição para um par de retas do espaço. Segundo esta definição, a distância entre duas retas concorrentes (ou coincidentes) é igual a zero. Se as retas são paralelas (logo coplanares), ocorre uma situação já estudada na Geometria Plana: cada ponto da primeira reta está a uma distância constante da segunda. Esta distância constante (que é o comprimento do segmento determinado por qualquer perpendicular a ambas) é a distância entre as retas.

O caso mais interessante ocorre quando as duas retas são reversas. Também neste caso o segmento de comprimento mínimo é dado por uma reta perpendicular a ambas; mas agora existe uma só perpendicular comum às duas retas. Veremos, a seguir, como construir esta perpendicular comum.

Construção da perpendicular comum a duas retas reversas. Começamos por traçar o par de planos paralelos α e β (figura 9.9) contendo cada uma das retas (para obter tais planos basta conduzir, por um ponto de cada uma das retas, uma paralela à outra). A seguir, por um ponto A_1 qualquer de r traçamos uma reta t, perpendicular ao plano β, que o corta em B_1. Por B_1, traçamos a paralela r' a r. A reta r' está contida em β e corta s no ponto B_2. Finalmente, por B_2 traçamos a reta t' paralela a A_1B_1. Note que as retas t', t, r e r' estão todas em um mesmo plano. Logo, t' corta r em um ponto A_2. A reta t' forma ângulo reto com r e s (por ser perpendicular aos planos α e β) e é concorrente com ambas. É, portanto, uma perpendicular comum a r e s.

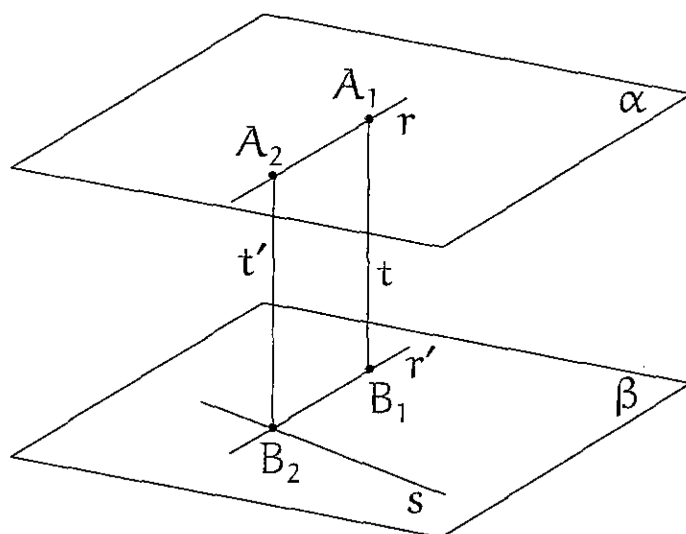


Fig. 9.9 - Perpendicular comum a duas retas reversas.

A perpendicular comum A_2B_2 entre as reversas r e s construída acima é única; basta observar que se existisse outra perpendicular comum CD, ela seria necessariamente paralela a A_2B_2, por serem ambas perpendiculares aos planos α e β. Mas assim os pontos C, D, A_2 e B_2 estariam todos no mesmo plano. Desta forma, as retas r e s seriam coplanares, o que é uma contradição.

Como a perpendicular comum a r e s é também a perpendicular comum aos planos α e β, o comprimento do segmento por ela determinado é o menor comprimento possível de um segmento cujos extremos sejam quaisquer pontos de α e β. Em particular, como

r e s estão respectivamente contidas em α e β, qualquer segmento com extremos nesta reta terá comprimento maior que o segmento da perpendicular comum. Logo, o comprimento do segmento da perpendicular comum exprime a distância entre as duas retas.

Exemplo. A figura 9.10 mostra uma ilustração de uma sala. A reta AB (determinada pelo encontro de duas paredes) é a perpendicular comum às retas reversas AC e BD.

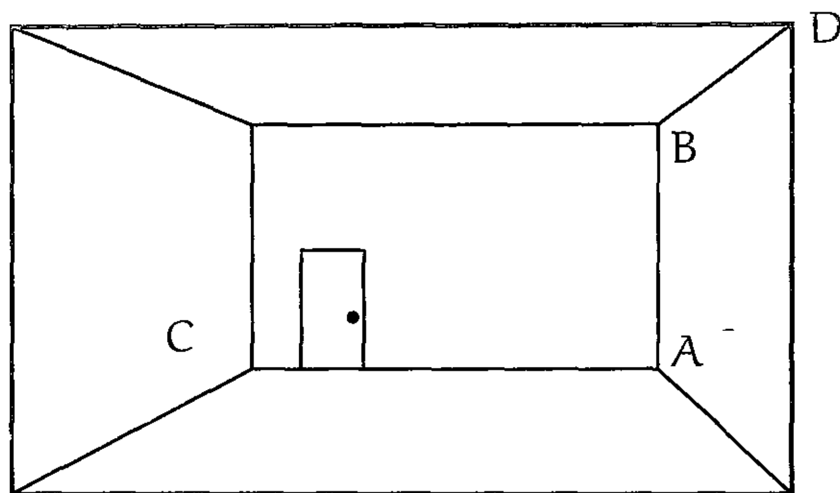


Figura 9.10

9.5 Ângulo Entre Retas

Já vimos como podemos medir ângulo entre retas quaisquer no espaço: basta tomar duas retas paralelas a elas passando por um ponto arbitrário. O ângulo formado por essas retas concorrentes é o ângulo formado pelas retas dadas inicialmente. Convém lembrar, da Geometria Plana, que o ângulo formado por duas retas concorrentes é definido como o menor dos quatro ângulos que elas formam; está, portanto, compreendido entre $0°$ (quando as retas são paralelas ou coincidentes) e $90°$ (quando as retas são ortogonais).

9.6 Ângulo Entre Planos

Ao definir planos perpendiculares já introduzimos a forma pela qual o ângulo entre dois planos α e β é medido. Quando α e β são

secantes, traçamos um plano γ perpendicular à reta de interseção de α e β, que corta α e β segundo as retas r e s, respectivamente (figura 9.11). A medida do ângulo entre os planos é, por definição, igual à medida do ângulo entre as retas r e s (é, assim, um valor entre 0° e 90°). Note que este ângulo é o mesmo qualquer que seja o plano γ: todos os planos perpendiculares à reta de interseção de α e β são paralelos entre si, determinando com α e β retas de interseção respectivamente paralelas.

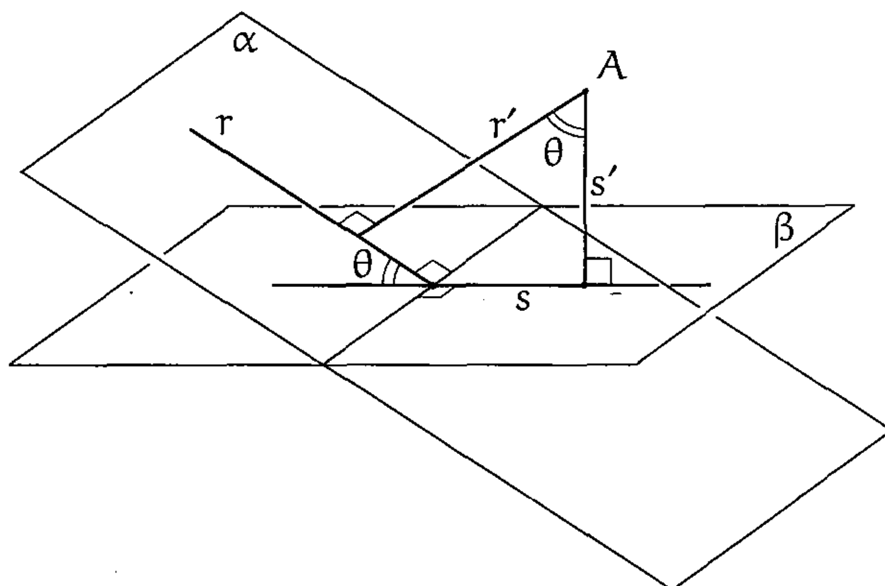


Fig. 9.11 - Ângulo entre planos.

Tomemos agora um ponto A qualquer sobre o plano γ e dele traçamos as retas r′ e s′ perpendiculares a α e β. Estas retas estão contidas em γ e são perpendiculares a r e s, respectivamente. Portanto, o ângulo formado por r′ e s′ é igual ao ângulo formado por r e s, que por sua vez é igual ao ângulo formado pelos planos. Ou seja, demonstramos que *o ângulo formado por dois planos é igual ao ângulo formado por duas retas respectivamente perpendiculares a estes planos*.

Convém aproveitar a ocasião para falar em medida de um diedro. Um *diedro* (ou ângulo diedro) é a figura formada por dois semiplanos – chamados de *faces* do diedro – limitados pela mesma reta, chamada de *aresta* do diedro (figura 9.12). Para medir um diedro, conduzimos um plano perpendicular à aresta e medimos

o ângulo entre as *semiretas* determinadas em cada face. Observe que a medida de um ângulo diedro pode variar entre 0° e 180°. Note também que o ângulo entre dois planos secantes é igual à medida do menor diedro formado por eles.

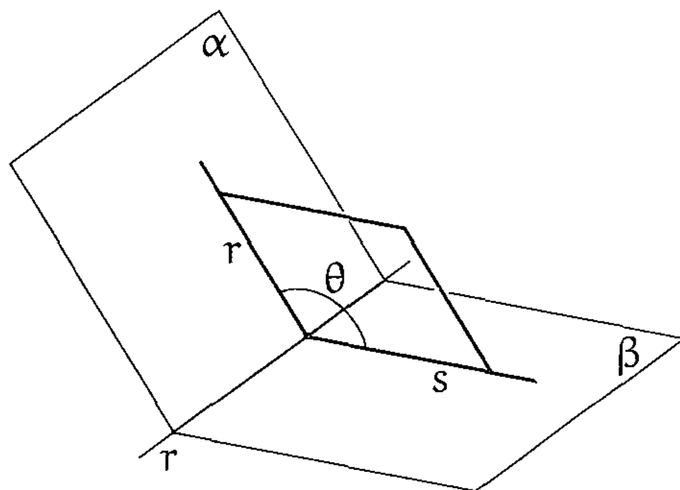


Fig. 9.12 - Medida de um diedro.

9.7 Ângulo Entre Reta e Plano

Vejamos agora como definir o ângulo entre uma reta e um plano. Naturalmente, este ângulo deverá ser igual a 90° quando a reta é perpendicular ao plano e deverá ser igual a zero quando a reta está contida no plano ou é paralela a ele. Se uma reta r é oblíqua a um plano α, definimos o ângulo entre r e α como o ângulo que r forma com sua projeção ortogonal sobre α (figura 9.13).

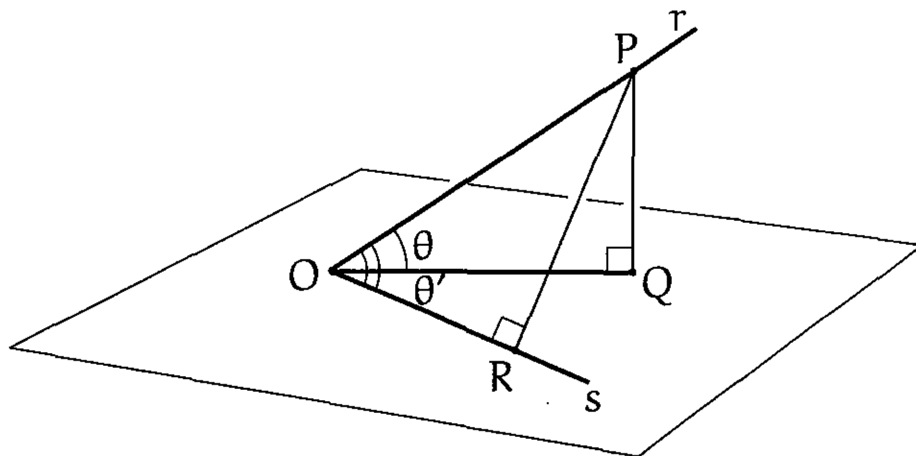


Fig. 9.13 - Ângulo entre reta e plano.

Consideremos agora uma reta qualquer s contida no plano α e vamos comparar o ângulo θ' formado por r e s com o ângulo θ formado por r e α. Podemos supor que s passa pelo ponto O em que r corta α. Por um ponto P de s exterior a α tracemos a perpendicular PQ ao plano α e a perpendicular PR à reta s. Os triângulos retângulos OQP e ORP têm a hipotenusa comum OP, enquanto os catetos opostos aos ângulos θ e θ' são tais que $PR \geqslant PQ$. Em conseqüência, $\operatorname{sen}\theta' \geqslant \operatorname{sen}\theta$ e, assim, $\theta' \geqslant \theta$. Além disso, a igualdade só ocorre quando a reta s é a projeção ortogonal de r sobre α. Portanto, *o ângulo entre uma reta r e um plano é igual ao menor ângulo formado por r e uma reta qualquer do plano.*

Exemplo. A figura 9.14 abaixo mostra a planta do telhado de uma casa. Cada plano contendo uma porção do telhado é chamado de "água"; o telhado da figura, portanto, possui 4 águas. Ao longo da reta de interseção de duas águas corre uma calha. Sabendo que cada água é inclinada de 30° em relação à horizontal, qual é a inclinação em relação à horizontal da calha AM assinalada na figura?

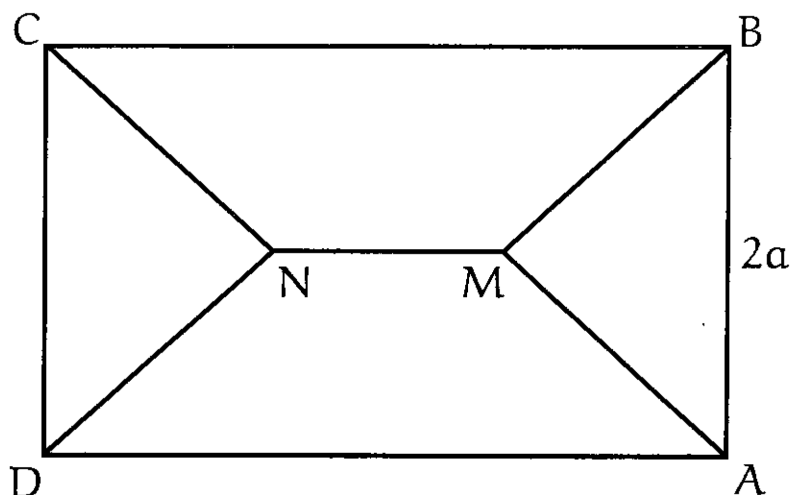


Figura 9.14

A figura 9.15 mostra uma vista em perspectiva do telhado, no qual estão representados os pontos P, Q e R, obtidos, respectivamente, projetando o ponto M sobre as beiradas AB e AD do telhado e sobre o plano ABCD. Os ângulos que as águas ABM e ADMN formam

com a horizontal são iguais, respectivamente, aos ângulos MPR e MQR. Como estes ângulos são ambos iguais a 30°, os triângulos retângulos MQR e MPR são iguais, já que possuem um cateto comum MR. Assim, designando a menor dimensão do retângulo ABCD por $2a$ temos:

$$RP = RQ = a \quad e \quad MR = RQ\ \text{tg}\ 30^\circ = a\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$$

O ângulo α que a reta AM forma com o plano horizontal é igual ao ângulo RAM do triângulo retângulo MAR, do qual conhecemos os catetos MR (calculado acima) e AR (diagonal do quadrado APRQ). Assim:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{MR}{AR} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad e \qquad \alpha \cong 22^\circ.$$

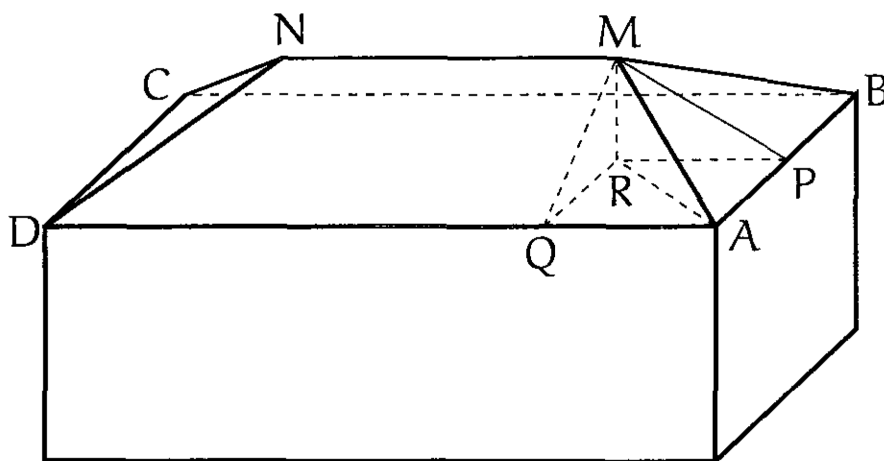


Figura 9.15

9.8 A Esfera

A superfície esférica (ou simplesmente esfera) de centro O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a O é igual a R. A esfera é o análogo tridimensional do círculo, inclusive na ambiguidade de terminologia: a palavra esfera tanto pode ser usada para se referir à superfície esférica quanto ao sólido por ela determinado.



A posição de um ponto em relação a uma esfera é determinada pela sua distância ao centro da esfera. Assim, pontos cuja distância ao centro seja menor que, maior que, ou igual ao raio são, respectivamente, interiores, exteriores ou estão sobre a superfície da esfera.

Da mesma forma, a posição de uma reta ou plano em relação a uma esfera é determinada pela distância do centro a esta reta ou plano. Quando a distância é maior que o raio, temos uma reta ou plano *exterior* à esfera (ou seja, sem pontos de interseção com a esfera). Uma reta ou plano cuja distância ao centro seja exatamente igual ao raio é *tangente* à esfera; isto é, tem apenas um ponto em comum com a esfera (figura 9.16). Este ponto é justamente o pé da perpendicular conduzida do centro da esfera a esta reta ou plano. Finalmente, se a distância ao centro é menor que o raio, a reta ou plano é *secante* à esfera.

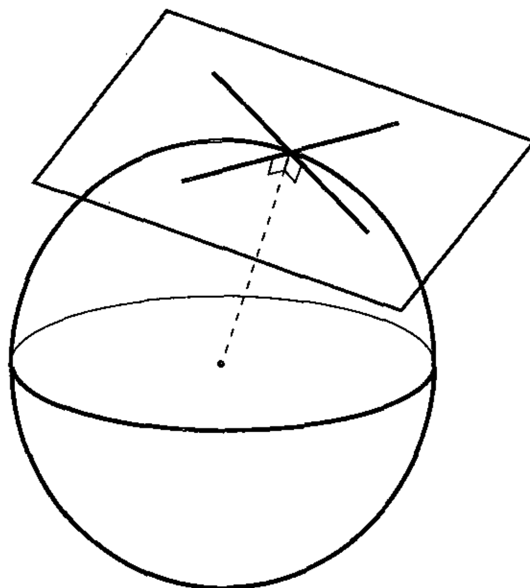


Fig. 9.16 - Uma esfera, um plano tangente e duas retas tangentes.

A interseção de uma reta secante com a esfera é um par de pontos, enquanto *um plano secante corta a esfera segundo um círculo.* De fato, os pontos de interseção de um plano com uma esfera são os pontos P do plano cuja distância PO ao centro O da esfera é igual a seu raio R. Seja Q o pé da perpendicular baixada de O ao plano α (figura 9.17). Qualquer que seja o ponto P em α, o triângulo POQ

é retângulo em Q. Logo, $PO^2 = PQ^2 + OQ^2$ e, assim, $PO = R$ se e somente se $PQ^2 = R^2 - d^2$, onde $d = OQ$ é a distância de O a α. Portanto, quando $d < R$, os pontos de α que estão na esfera se encontram em um círculo de centro Q e raio $\sqrt{R^2 - d^2}$. Observe que esse raio é máximo quando $d = 0$ (isto é, quando o plano contém o centro da esfera). Círculos assim obtidos são chamados de *círculos máximos* da esfera e têm o mesmo centro e o mesmo raio que a esfera.

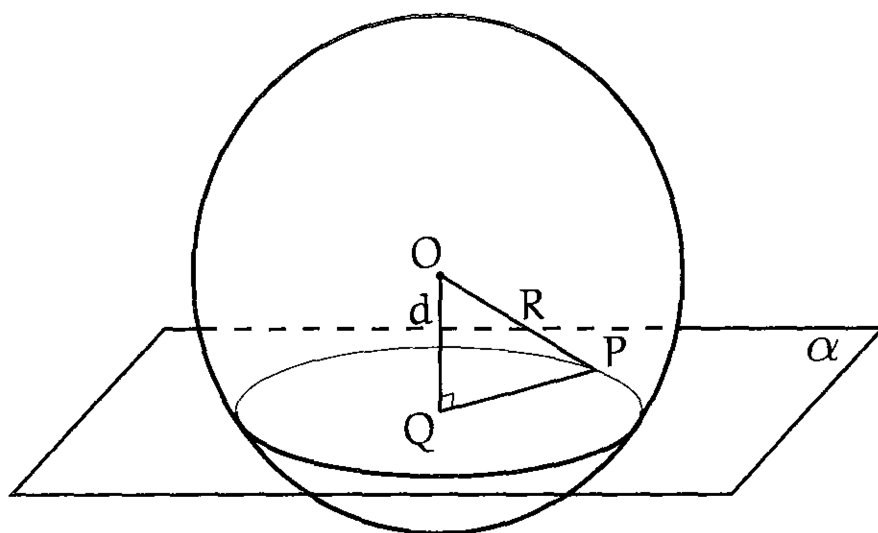


Fig. 9.17 - Plano secante a uma esfera.

Exemplo. Calcule o raio das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas a um cubo de aresta a.

Em qualquer paralelepípedo, todas as diagonais (isto é, os segmentos que ligam vértices opostos) têm um ponto comum, que é o ponto médio de cada uma delas (basta observar que as diagonais de um paralelepípedo são, duas a duas, diagonais de paralelogramos. O ponto de interseção das diagonais é, na verdade, o centro de simetria do paralelepípedo. Se o paralelepípedo é retângulo, todas as diagonais têm o mesmo comprimento; logo, existe uma esfera centrada nesse ponto e que passa por todos os vértices. Essa esfera é chamada de esfera circunscrita ao paralelepípedo. No caso do cubo, o centro é também equidistante das 6 faces e equidistante das 12 arestas. Logo, com o mesmo centro, existe também

uma esfera tangente às faces (que é a esfera inscrita no cubo) e uma esfera tangente às arestas. É fácil ver que os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas do cubo têm raios respectivamente iguais à metade de uma diagonal, à metade da aresta e à metade da diagonal de uma face (figura 9.18). Logo, esses raios são respectivamente:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad r = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

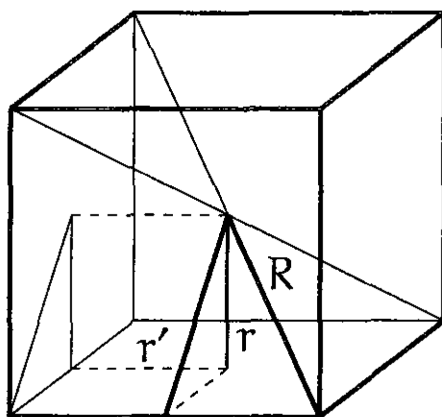


Fig. 9.18 - As esferas associadas a um cubo.

9.9 Atividades em Sala de Aula

Problemas envolvendo cálculo de ângulos e distâncias são uma ótima forma de fixar as noções fundamentais de Geometria no Espaço. É especialmente interessante formular problemas em que as figuras representem objetos do mundo real ou modelos que os alunos possam construir (veja os exercícios 5 e 6).

Assim como na Geometria Plana o aluno toma contato com as circunferências inscrita e circunscrita a certos polígonos, é natural estender esse conceito para buscar esferas inscrita e/ou circunscrita aos poliedros estudados. A definição de esfera pode ser introduzida a qualquer momento. Ela é a mesma definição de circunferência no plano. Relacionar esferas com os sólidos em estudo é uma excelente forma de desenvolver o raciocínio e a visão espacial dos alunos, porque, não podendo representá-la de forma con-

veniente em um desenho, serão forçados a utilizar sua definição em situações que não poderão desenhar. Vejamos as principais situações.

1. No cubo, os alunos devem identificar as 4 diagonais, calcular o comprimento e concluir que elas se cortam no centro do cubo, como fizemos no exemplo acima. Esta é uma primeira e natural situação para introduzir a esfera circunscrita, porque fica claro que esse ponto equidista de todos os vértices. É também fácil concluir que o centro do cubo equidista de todas as faces, introduzindo aí a esfera inscrita.

2. No paralelepípedo retângulo, os alunos devem calcular o comprimento de uma diagonal, concluir que as 4 diagonais têm um ponto comum (o centro do paralelepípedo) e que esse ponto é médio de cada uma delas. Ficará então claro que o paralelepípedo retângulo possui uma esfera circunscrita cujo raio é a metade de uma diagonal. A existência de uma esfera inscrita deve ser questionada e os alunos deverão concluir que essa esfera existe se, e somente se, o paralelepípedo retângulo for um cubo.

3. Ainda falando sobre o paralelepípedo retângulo o professor deve explorar ângulos: o ângulo de uma diagonal com uma aresta, o ângulo de uma diagonal com uma face e o ângulo entre duas diagonais. São exercícios interessantes e que vão requerer uma revisão dos conceitos anteriores. Os co-senos desses ângulos podem ser facilmente calculados em triângulos retângulos convenientes e, no caso do ângulo entre duas diagonais, tem-se uma aplicação da "lei dos co-senos".

4. Nos prismas regulares, o professor poderá investigar com seus alunos os mesmos temas: diagonais, ângulos e existência das esferas inscrita e circunscrita.

5. As pirâmides regulares (em particular as de bases triangular, quadrangular e hexagonal) possuem relações métricas interessantes e o professor poderá mostrar que todas possuem sempre

as esferas inscrita e circunscrita.

6. As áreas também devem ser exploradas. Definindo a área de um poliedro como a soma das áreas de todas as suas faces, os alunos poderão calcular também as áreas dos poliedros estudados.

7. Todo cilindro reto de base circular possui uma esfera circunscrita. Dado o cilindro, não é difícil calcular o raio dessa esfera. Para isso, recomendamos que o aluno imagine o cilindro e a esfera e desenhe uma seção meridiana, ou seja, uma seção que contém o eixo do cone. Com isso, ele vai perceber que calcular o raio de uma esfera circunscrita a um cilindro é o mesmo que calcular o raio de uma circunferência circunscrita a um retângulo.

8. O cilindro reto de base circular só possui uma esfera inscrita se sua altura for igual ao diâmetro da base. O cilindro que possui uma esfera inscrita é chamado de cilindro equilátero.

9. O cone reto da base circular sempre possui esferas inscritas e circunscritas. Fazendo uma seção meridiana, o problema de calcular os raios dessas esferas se reduz ao problema de calcular os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo isósceles. É um bom momento para recordar elementos de geometria plana.

10. Existem partes da superfície da esfera que os alunos devem conhecer e associar aos termos usados na Geografia. Um plano que corta a esfera, divide sua superfície em duas regiões. Cada uma delas se chama uma calota. Se dois planos paralelos cortam a esfera, a parte da superfície da esfera compreendida entre eles é uma zona esférica. A geografia usa esses termos quando se refere às calotas polares, zona equatorial e zona temperada. Essas regiões são limitadas por circunferências contidas em planos paralelos ao plano do equador da Terra, chamadas de Trópico de Câncer, Trópico de Capricórnio e Círculos polares e o professor poderá buscar nos livros de Geografia a localização dessas circunferências.

Em um outro capítulo, quando estivermos estudando as superfícies de revolução, calcularemos as áreas da zona e das calotas esféricas. As fórmulas são simples e mesmo que não puderem ser demonstradas, fornecerão elementos para interessantes problemas.

11. Termos como "equador", "meridiano", "pólo norte", etc. devem ser utilizados nos problemas porque são conhecidos e sobretudo úteis para a localização de pontos sobre a esfera. O professor poderá explicar que fixando um equador e um meridiano, qualquer ponto da superfície da esfera fica determinado por duas coordenadas: a latitude e a longitude.

12. Dois meridianos delimitam uma região da superfície esférica chamada fuso esférico. Esses meridianos estão contidos em dois semi-planos cuja interseção contém um diâmetro da esfera e o ângulo entre eles é o ângulo do fuso.

Todos conhecem a expressão "fuso horário". Teoricamente, a superfície da Terra está dividida em 24 fusos, correspondendo a cada um, uma hora do dia. Essa situação sugere o interessante problema de determinar que horas são em determinada cidade do nosso planeta, no momento que essa pergunta estiver sendo feita no Rio de Janeiro. Para responder, basta saber as longitudes das duas cidades e conhecer como os fusos horários foram construídos. Essa construção se encontra no exercício 22 desse capítulo.

Imaginamos que essas atividades sejam feitas na forma de exercícios para não tornar a teoria ainda mais extensa. Isso se justifica porque, na verdade, não há nenhum teorema novo envolvido. Tudo o que se precisa utilizar são os teoremas iniciais da Geometria Espacial e as propriedades e relações métricas da geometria plana.

Exercícios

1. Mostre que as arestas opostas de um tetraedro regular são ortogonais.

2. Considere os pontos médios das arestas BC, CD, BF, DH, EF e EH de um cubo. Mostre que esses seis pontos estão no mesmo plano.

3. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos não colineares?

4. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois planos secantes dados? E se os planos forem paralelos?

5. Um pedaço de papel em forma de um quadrado ABCD é dobrado ao longo da diagonal AC de modo que os lados AB e AD passem a formar um ângulo de 60°. A seguir, ele é colocado sobre uma mesa, apoiado sobre esses lados. Nessas condições, calcule o ângulo que a reta AC e o plano ABC formam com o plano horizontal.

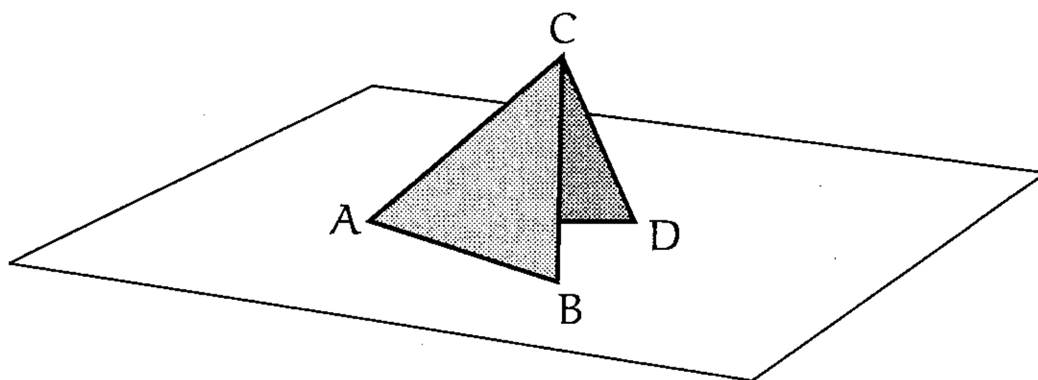


Figura 9.19

6. Um tetraedro pode ser construído a partir de um envelope da forma descrita abaixo.

a) Tome um envelope comum, feche-o e trace as diagonais do retângulo por ele determinado.
b) A seguir, corte o envelope como indicado, removendo seu quarto superior (b).
c) Agora, dobre o envelope, encaixando uma borda na outra. Pronto! Temos um tetraedro.

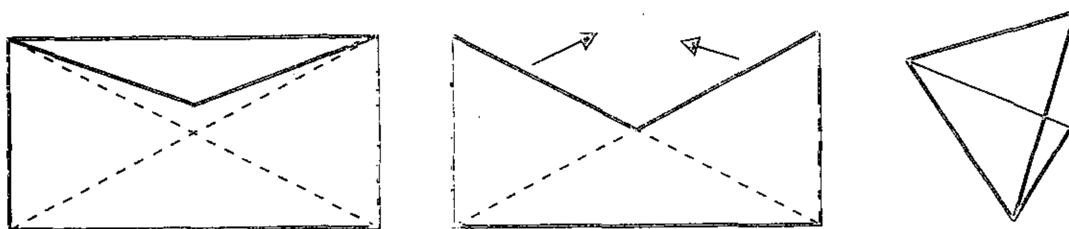


Figura 9.20

Que propriedades interessantes possui o tetraedro formado? Sob que condições ele é um tetraedro regular?

7. Considere três retas mutuamente perpendiculares x, y e z, concorrentes em O. Uma reta r passa por O e forma ângulos iguais a α, β e γ com x, y e z. Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

8. Sejam α e β dois planos secantes. Considere uma reta r qualquer contida em α. Mostre que o ângulo entre r e β é máximo quando r é perpendicular à interseção de α e β (retas de um plano α que são perpendiculares à sua interseção com o plano β são, por esta razão, chamadas de retas de máximo declive de α em relação a β.)

9. Considere um octaedro regular de aresta a. Determine:

a) A distância entre duas faces opostas.

b) O ângulo diedro formado por duas faces adjacentes.

10. As moléculas de metano (CH_4) têm o formato de um tetraedro regular, com um átomo de hidrogênio em cada vértice, cada um deles ligado ao átomo de carbono no centro do tetraedro. Calcule o ângulo formado por duas dessas ligações.

12. Sejam r e s duas retas reversas ortogonais e MN o segmento da perpendicular comum. Tomam-se um ponto A sobre r e um ponto B sobre s. Calcular o comprimento do segmento AB em função de $MA = a$, $NB = b$ e $MN = c$.

13. Mostre que a reta que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro regular é a perpendicular comum a elas.

14. Qual é a seção determinada em um tetraedro regular ABCD por um plano paralelo às arestas AB e CD e passando pelo ponto médio da aresta AC?

15. Sejam dois pontos A e B não diametralmente opostos de uma esfera. Mostre que existe um e somente um círculo máximo da esfera passando por A e B.

16. Sejam A e B pontos do espaço. Qual é o lugar geométrico dos pontos P do espaço tais que o ângulo APB seja reto?

17. Seja P um ponto exterior a um plano α e Q um ponto de α. Qual é o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P às retas de α que passam por Q?

18. Em um tetraedro regular de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

19. Em um octaedro regular de aresta a, calcule os raios das esferas circunscrita, inscrita e tangente às arestas.

20. Quatro esferas de raio 1 são tangentes entre si exteriormente três a três e tangenciam internamente uma esfera de raio R. Determine R.

21. Considere nove esferas de raio R, interiores a um cubo de aresta a, sendo uma com centro no centro do cubo e cada uma das demais tangentes a três faces e à esfera central. Calcule R em função de a.

22. O nosso planeta é dividido em regiões chamadas "fusos horários" de modo que, em cada uma delas, teoricamente todos os relógios devem marcar a mesma hora no mesmo instante. Qual é o ângulo central correspondente a um fuso horário?

23. O fuso horário de referência (chamado GMT-O) é a região compreendida entre as longitudes $-7,5°$ e $+7,5°$. Abaixo estão as

longitudes de seis cidades:

Nova York	– 74°
Rio de Janeiro	– 43°
Paris	2°
Atenas	24°
Bagdá	45°
Calcultá	88°

Se são 12 horas no Rio, que horas serão nas outras cinco cidades?

Capítulo 10

Poliedros

10.1 Introdução

No programa de Geometria Espacial, este capítulo é quase independente dos demais. Vamos aqui estudar, de uma forma geral, os sólidos formados por "faces", os chamados poliedros. Antes de mais nada, é preciso estabelecer uma definição adequada para o nível de estudo que se pretende. Dizer apenas que poliedros são sólidos formados por faces (partes limitadas de um plano), pode dar uma idéia do que eles sejam, mas não serve absolutamente como definição. Aliás, uma das causas da dificuldade que os matemáticos do passado tiveram para demonstrar teoremas sobre poliedros, estava justamente na falta de uma definição precisa do significado dessa palavra. Por isso, vamos recomendar para o estudante do 2º grau, uma definição, que não permita grandes generalidades, mas seja suficiente para demonstrar os teoremas e propriedades importantes.

Uma primeira idéia para definir os poliedros é a seguinte: "*Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono".

Cada um desses polígonos chama-se uma *face* do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é também chamado *vértice* do poliedro.

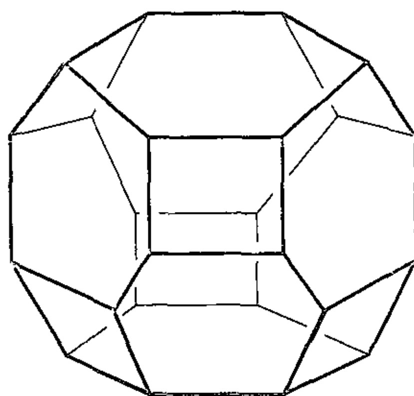


Fig. 10.1 - Um poliedro.

A proposta de definição que demos é simples e bastante compreensível, mas permite liberdades que, a nosso ver, não deveriam ser objeto de discussão em um primeiro estudo dos poliedros. Por exemplo, a figura abaixo mostra um sólido que, de acordo com essa definição, é um poliedro.

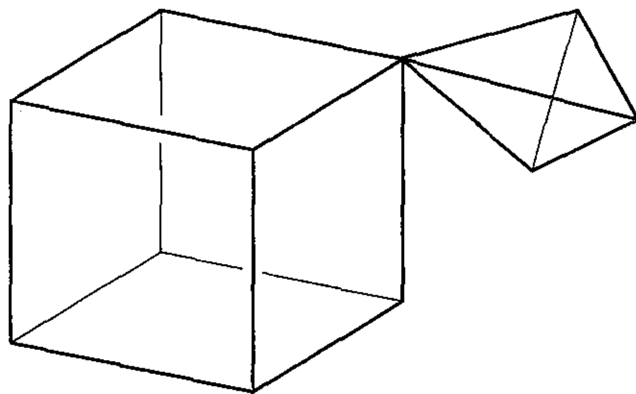


Fig. 10.2 - Um poliedro estranho.

É nossa opinião que, no segundo grau, não devemos ainda tratar de tais objetos. Em um primeiro estudo, acreditamos que devemos dirigir nossa atenção aos poliedros convexos, e é o que faremos aqui. Mesmo assim, por motivos que o leitor perceberá adiante, será necessário acrescentar na proposta de definição que demos uma restrição. Adotaremos então a seguinte definição.

Definição. *Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma *aresta* do poliedro e cada vértice de uma face é um *vértice* do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Todo poliedro (no sentido da definição acima), limita uma região do espaço chamada de *interior* desse poliedro. Dizemos que um poliedro é *convexo* se o seu interior é convexo. Vamos recordar o que isto significa.

"Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se *convexo*, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C".

No caso dos poliedros, podemos substituir essa definição por outra equivalente, que nos será mais útil:

"Um poliedro é convexo se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos".

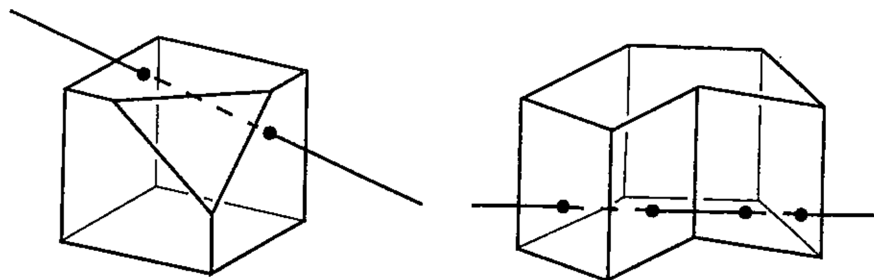


Fig. 10.3 - Um poliedro convexo e um não convexo.

10.2 As Primeira Relações

Dado um poliedro, vamos agora tratar do problema de contar as suas faces, os seus vértices e as suas arestas. Representaremos então por A, o número de arestas, por F, o número de faces e por V, o seu número de vértices. Ainda, como as faces podem ser de gêneros diferentes, representaremos por F_n $(n \geq 3)$, o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma, como os vértices também podem ser de gêneros diferentes, representaremos por

V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas, e observe que, pelo item (b) da definição do poliedro, cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas.

São então evidentes as relações:

$$F = F_3 + F_4 + \dots$$
$$V = V_3 + V_4 + \dots$$

Imagine agora que o poliedro foi desmontado e que todas as faces estão em cima de sua mesa. Quantos lados todos esses polígonos possuem? Fácil. Basta multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de pentágonos por 5 e assim por diante, e depois somar os resultados. Mas, como cada aresta do poliedro é lado de exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

Podemos também contar as arestas observando os vértices do poliedro. Se em cada vértice contarmos quantas arestas nele concorrem, somando os resultados obteremos também o dobro do número de arestas (porque cada aresta terá sido contada duas vezes: em um extremo e no outro). Logo,

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$$

10.3 Duas Desigualdades

Dessas primeiras relações entre os elementos de um poliedro podemos deduzir duas desigualdades: a) $2A \geqslant 3F$ e b) $2A \geqslant 3V$.

Observe a justificativa da primeira.

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$
$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + F_4 + 2F_5 + \dots$$
$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \dots$$
$$2A \geqslant 3F$$

Repare que a igualdade só vale se $F_4 = F_5 = \dots = 0$, ou seja,

se o poliedro tiver apenas faces triangulares. A segunda desigualdade se justifica de forma análoga e, neste caso, a igualdade ocorrerá apenas quando em todos os vértices concorrerem 3 arestas.

O resultado central deste capítulo é o Teorema de Euler. Seu enunciado, por sua beleza e simplicidade, costuma fascinar os alunos da escola secundária quando tomam contato com ele pela primeira vez: $V - A + F = 2$. A observação do resultado em desenhos de poliedros ou em objetos do cotidiano é estimulante e, sobretudo, intrigante. Porque sempre ocorre isso?

Na verdade, a relação de Euler não é verdadeira para todos os poliedros de acordo com nossa definição. Mas, para os poliedros convexos ela é verdadeira. Em contextos mais gerais, onde inclusive se adota uma definição de poliedro menos restritiva que a nossa, o valor de $V - A + F$ é chamado de *característica* do poliedro. Não vamos aqui tratar dessas coisas, mas o leitor curioso poderá encontrar farto material para leitura no livro "Meu Professor de Matemática" do professor Elon Lages Lima, editado pela SBM.

O Teorema de Euler foi descoberto em 1758. Desde então, diversas demonstrações apareceram na literatura e algumas continham falhas (como a de Cauchy), que foram descobertas muitos anos mais tarde. Essas falhas eram devidas à falta de precisão na definição de *poliedro*. Mesmo Euler nunca se preocupou em definir precisamente essa palavra.

A demonstração que mostraremos aqui para poliedros convexos segue quase integralmente a que foi publicada na RPM nº 3 (1983) pelo professor Zoroastro Azambuja Filho. Pela elegência e precisão dos argumentos, essa demonstração merece ser publicada mais uma vez.

Teorema (Euler). Em todo poliedro com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.

Iniciamos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P. As faces são numeradas de 1 até F e seja n_k o gênero da k-ésima face $(1 \leqslant k \leqslant F)$. Lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono con-

vexo de gênero n é igual a $\pi(n-2)$ e observando que se um poliedro é convexo então todas as suas faces são polígonos convexos, teremos para a soma dos ângulos internos de todas as faces de P a expressão:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \cdots + \pi(n_F - 2)$$

ou ainda,

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - (2 + 2 + \cdots + 2)].$$

Ora, no primeiro parêntese, a soma dos números de lados de todas as faces é igual ao dobro do número de arestas e no segundo parêntese, a soma das F parcelas é igual a $2F$. Assim,

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F). \qquad (1)$$

Vamos agora escolher uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces de P. Tomamos também um plano H, que não intersecta P e que seja perpendicular a r. O plano H será chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas *retas verticais*. H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P. Este será chamado o semi-espaço *superior* e diremos que seus pontos estão acima de H. Para melhor ilustrar o nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando a pino sobre o semi-espaço superior de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto X do semi-espaço superior corresponde um ponto X' em H, chamado *sombra* de X. A sombra de qualquer conjunto C, contido no semi-espaço superior é, por definição, o conjunto C', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de C.

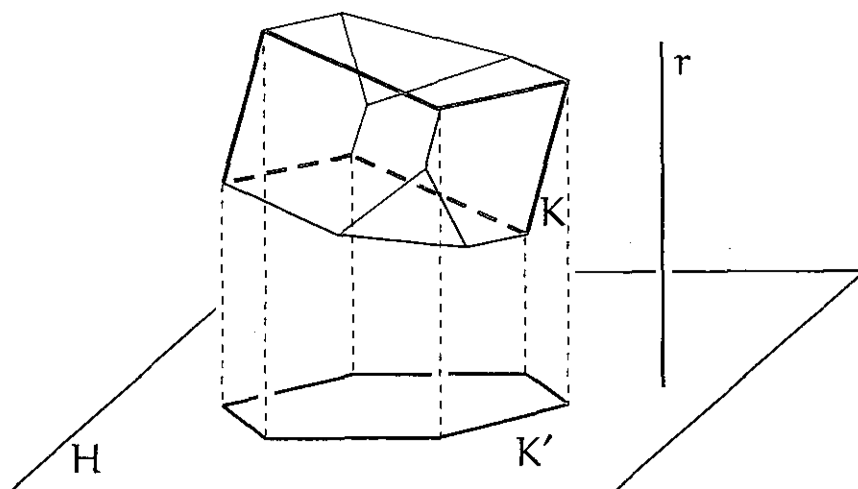


Fig. 10.4 - A região iluminada e a região sombria.

Consideremos então a sombra P′ do poliedro P. Como P é convexo, cada ponto de P′ é sombra de um ou dois pontos de P (veja a nossa definição alternativa de poliedro convexo). Ora, a sombra P′ do poliedro P tem como contorno um polígono convexo K′, sombra de uma poligonal fechada K formada por arestas de P. Cada ponto de K′ é sombra de um único ponto de P. A poligonal K é chamada de contorno aparente do poliedro P. Cada ponto interior de P′ (portanto não pertencente a K′) é sombra de exatamente dois pontos de P. Dados dois pontos de P que têm mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos *ponto iluminado* e o mais baixo será chamado *sombrio*.

Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos os ângulos das faces de P, observando que a soma dos ângulos internos de uma face é *a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra* (âmbos são polígonos de mesmo gênero). Sejam: V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértices do contorno aparente K. Então, $V = V_0 + V_1 + V_2$. Notemos ainda que V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal K′, contorno de P′.

Consideremos então a sombra das faces iluminadas.

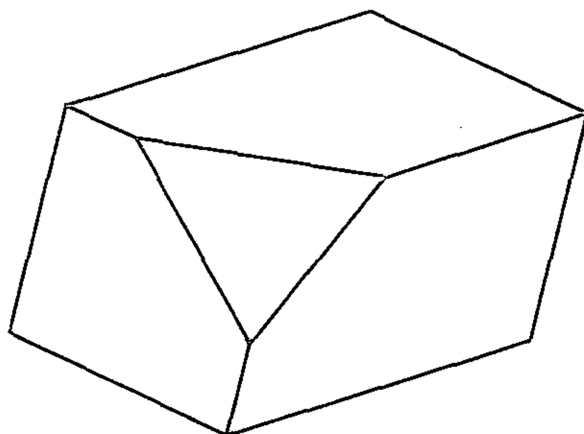


Fig. 10.5 - A sombra das faces iluminadas.

A sombra das faces iluminadas é um polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno e V_1 pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de P. A soma de todos os ângulos da figura anterior é:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Por raciocínio inteiramente análogo, obteríamos para a soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias,

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando as duas, obtemos:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2) \\ S &= 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2) \qquad (2) \\ S &= 2\pi(V - 2) \end{aligned}$$

Comparando (1) e (2) e dividindo por 2π, resulta que $A - F = V - 2$, ou seja,

$$V - A + F = 2$$

como queríamos demonstrar.

Comentários.

1) É fácil encontrar exemplos de poliedros não convexos que satisfazem a relação de Euler. Por exemplo, se um poliedro P não

convexo puder ser colocado em uma posição de modo que sua sombra seja um polígono onde cada um de seus pontos seja sombra de no máximo dois pontos de P, a demonstração que demos continua válida e a relação de Euler se verifica.

2) Todas as relações que encontramos são apenas condições necessárias. Isto quer dizer que não basta que três números A, V e F satisfaçam a elas para que se tenha certeza da existência de um poliedro com essas características.

Exemplos.

1) A bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa de 70 foi inspirada em um conhecido poliedro convexo (descoberto por Arquimedes) formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Pergunta-se quantos vértices possui tal poliedro.

Solução. De acordo com nossa notação, temos $F_5 = 12$, $F_6 = 20$ e portanto $F = 32$. Determinamos em seguida o número de arestas desse poliedro:

$$2A = 5F_5 + 6F_6 = 5 \cdot 12 + 6 \cdot 20 = 180$$
$$A = 90.$$

Como o poliedro é convexo, vale a relação de Euler $V - A + F = 2$, de onde concluímos que $V = 60$.

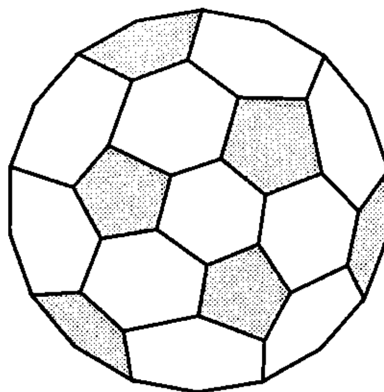


Fig. 10.6 - A bola de futebol.

2) Descreva e mostre uma possibilidade para o desenho de um poliedro convexo que possui 13 faces e 20 arestas.

Solução. Imediatamente antes de concluir a desigualdade $2A \leqslant 3F$ (volte atrás no texto), tínhamos encontrado a relação

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \dots ,$$

ou seja,

$$2A - 3F = F_4 + 2F_5 + \dots .$$

Como $A = 20$ e $F = 13$, temos $1 = F_4 + 2F_5 + \dots$, o que só é posível se $F_4 = 1$ e $F_5 = F_6 = \dots = 0$. Isto quer dizer que este poliedro deve possuir uma única face quadrangular e todas as outras 12 faces triangulares. Como pela relação de Euler ele deve possuir 9 vértices, um desenho possível é o que está abaixo.

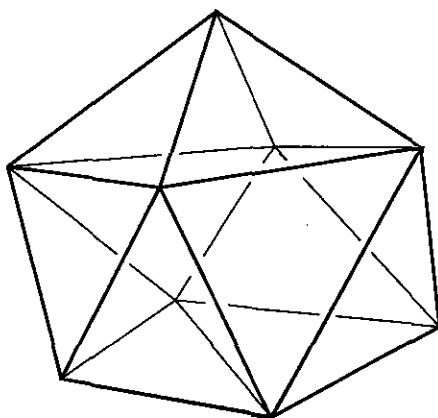


Fig. 10.7 - Uma solução do exemplo 2.

10.4 Poliedros Regulares

Desde a antiguidade são conhecidos os poliedros regulares, ou seja, poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares iguais e que em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas. O livro XIII dos "Elementos" de Euclides (cerca de 300 a.C.) é dedicado inteiramente aos sólidos regulares e contém extensos cálculos que determinam, para cada um, a razão entre o comprimento da aresta e o raio da esfera circunscrita. Na última proposição daquele livro, prova-se que os poliedros regulares são apenas 5: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. A importância desse fato fica evidente quando se percebe

que a história dos séculos seguintes é farta em exemplos de matemáticos, filósofos e astrônomos que tentaram elaborar teorias de explicação do universo com base na existência desses 5 sólidos regulares. Mesmo Kepler, 19 séculos depois dos "Elementos" de Euclides, tentou elaborar uma cosmologia com base nos 5 poliedros regulares.

É natural interesse do professor secundário conhecer não só os poliedros regulares, como também saber porque existem apenas cinco.

Definição. Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Teorema. Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Para demonstrar, seja n o número de lados de cada face e seja p o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos então $2A = nF = pV$, ou

$$A = \frac{nF}{2} \quad \text{e} \quad V = \frac{nF}{p}.$$

Substituindo na relação de Euler, obtemos

$$\frac{nF}{p} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}.$$

Devemos ter $2p + 2n - pn > 0$, ou seja

$$\frac{2n}{n-2} > p.$$

Como $p \geqslant 3$, chegamos a $n < 6$. As possibilidades são então as

seguintes:

$$n = 3 \longrightarrow F = \frac{4p}{6-p} \longrightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4 \text{ tetraedro)} \\ p = 4 \rightarrow F = 8 \text{ (octaedro)} \\ p = 5 \rightarrow F = 20 \text{ (icosaedro)} \end{cases}$$

$$n = 4 \longrightarrow F = \frac{2p}{4-p} \longrightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 \text{ (cubo)}$$

$$n = 5 \longrightarrow F = \frac{4p}{10-3p} \longrightarrow p = 3 \rightarrow F = 2 \text{ (dodecaedro)}$$

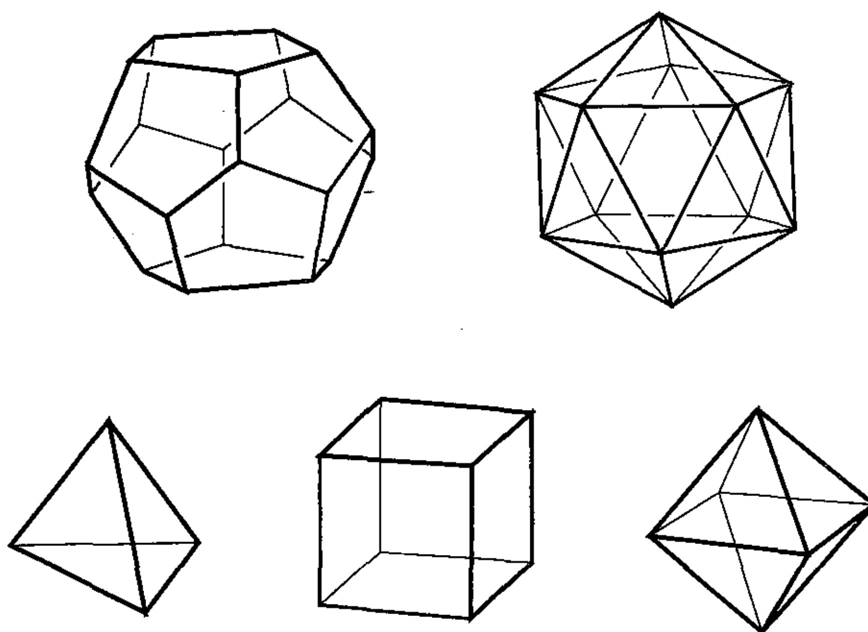


Fig. 10.8 - Os poliedros regulares.

10.5 O Caso Plano do Teorema de Euler

O Teorema de Euler foi demonstrado aqui para poliedros convexos. Mas não é difícil observar que ele vale também em outras situações. Vamos descrever uma situação em que o Teorema de Euler se aplica em regiões de um plano.

Tomemos um poliedro convexo P e uma esfera S que o contenha. A partir de um ponto interior ao poliedro, projetamos P sobre S como mostra a figura a seguir.

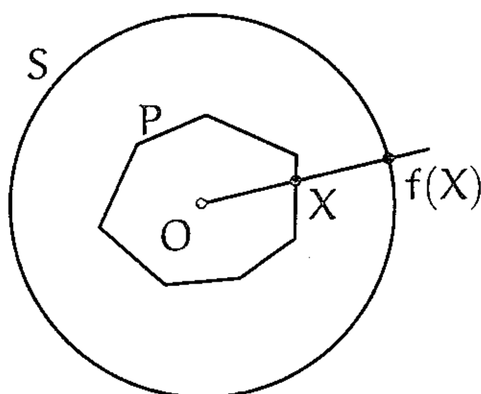


Fig. 10.9 - A projeção de P sobre S.

A função $f: P \to S$ é definida da seguinte forma. Sendo O um ponto interior a P, para cada ponto $X \in P$, definimos $f(X)$ como o ponto de interseção da semi-reta OX com S. A função f é contínua (o que significa que pontos *próximos* de P são levados em pontos *próximos* de S) e sua inversa $f^{-1}: S \to P$ é também contínua. Vemos agora a esfera dividida em *regiões* limitadas por arcos de circunferência (ou simplesmente *linhas*). Chamando de *nó* a projeção de cada vértice temos cada região limitada por pelo menos 3 linhas e também cada nó como extremidade de pelo menos 3 linhas.

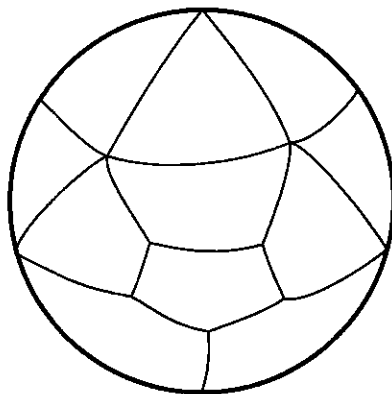


Fig. 10.10 - A esfera dividida em regiões.

É claro que para as linhas, regiões e nós da esfera S vale a relação de Euler, porque ela já era válida em P. Tomemos agora um ponto N interior a uma região de S, um plano Π perpendicular ao diâmetro de S que contém N e uma função $p: S - \{N\} \to \Pi$, tal que para cada ponto $Y \in S - \{N\}$, $p(Y)$ é a interseção da semi-reta NY com Π.

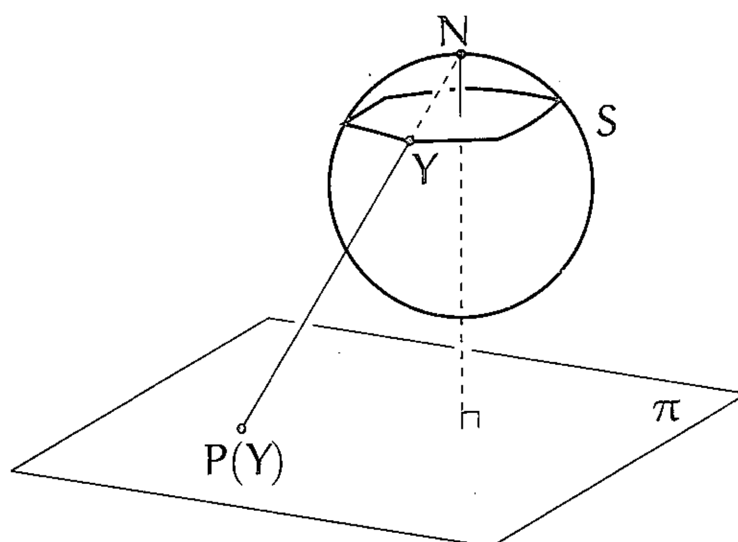
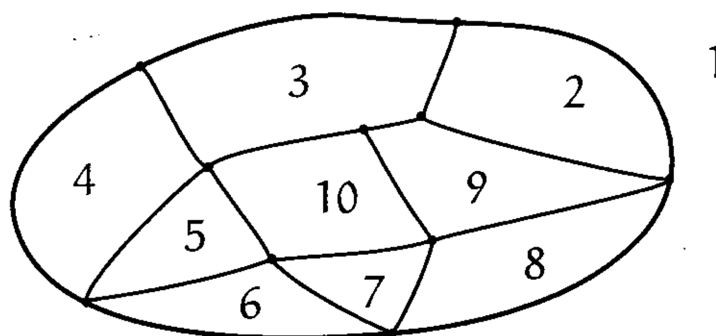


Fig. 10.11 - A projeção das regiões da esfera no plano.

Se o poliedro original P tinha F faces, V vértices e A arestas vemos agora o plano Π dividido em F regiões por meio de A linhas que se encontram em V nós. Por comodidade, as linhas podem ser chamadas de "arestas" os nós de "vértices" e as regiões de "faces". É claro que das F regiões, uma é ilimitada (chamada *oceano*) porque é projeção da região de S que contém o ponto N, mas relação de Euler continua válida. A figura obtida em Π pode ser agora continuamente deformada mas a relação de Euler se mantém inalterável.

Observe no desenho a seguir um exemplo onde o plano está dividido em 10 regiões (faces), através de 18 linhas (arestas) que concorrem em 10 nós (vértices).



$$V-A+F=10-18+10=2$$

Fig. 10.12 - Observando que $V - A + F = 10 - 18 + 10 = 2.$

As transformações que fizemos são equivalentes a imaginar um poliedro de borracha e inflá-lo injetando ar até que se transforme em uma esfera. Em seguida, a partir de um furo feito em uma das regiões, esticá-lo até que se transforme em um plano. Isto significa que o Teorema de Euler não é um teorema de Geometria, mas sim de Topologia. Não importa se as faces são planas ou não, ou se as arestas são retas ou não. Tudo pode ser deformado à vontade desde que essas transformações sejam funções contínuas cujas inversas sejam também contínuas (chamadas *homeomorfismos*), ou seja, para cada transformação que fizermos por uma função contínua, deveremos poder voltar à situação original por meio de uma outra função também contínua.

10.6 Uma Outra Demonstração do Teorema de Euler no Plano

A demonstração do caso plano do Teorema de Euler pode ser feita diretamente, ou seja, sem recorrer ao resultado obtido no espaço. Ainda, o leitor poderá perceber que a relação de Euler para o plano vale em situações mais gerais do que as que mostramos antes.

Consideremos então uma região R do plano dividida em outras regiões justapostas como mostra a figura a seguir.

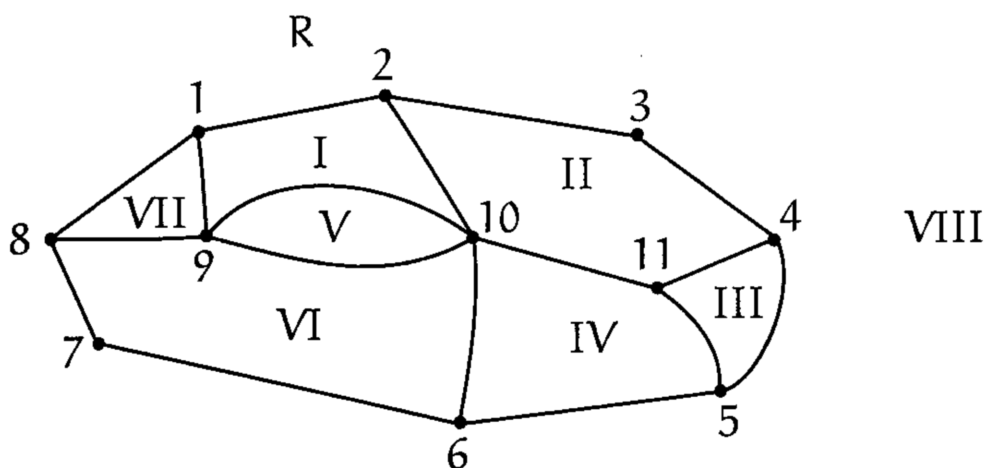


Fig. 10.13 - A divisão de uma região em outras justapostas.

Cada região (seja R ou uma da decomposição) é limitada por pelo menos duas arestas e um vértice é um ponto comum a pelo me-

nos duas arestas. Devemos enfatizar que aqui, o termo *aresta* não significa um segmento de reta mas sim qualquer curva contínua, sem auto-interseções, que liga um vértice a outro vértice. Uma boa ilustração do que estamos dizendo, consiste em observar o mapa do Brasil dividido nos seus estados. Cada estado é uma face e cada linha de fronteira é uma aresta. Devemos ainda exigir (e isso é muito importante) que nenhuma região fique completamente dentro de outra. Assim, decomposições como as que mostramos abaixo estão proibidas.

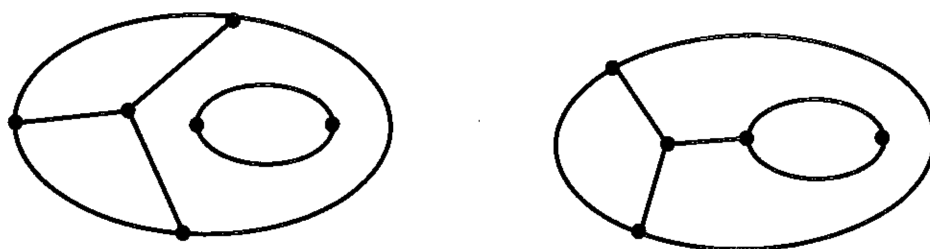


Fig. 10.14 - Decomposições proibidas.

É também conveniente considerar o exterior de R como uma região. Observando novamente a figura 10.13, temos então o plano dividido em 8 regiões. As regiões numeradas de I a VII são limitadas e a região VIII é ilimitada, tendo o contorno de R como sua fronteira. A região ilimitada é comumente chamada de *oceano*.

Para ilustrar o que estamos dizendo e ainda observando a figura 10.13, o contorno da região R é formado pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices consecutivos de 1 a 8 e depois voltando a 1 (sem passar por 9). A região VIII, o oceano é formado pelos pelos pontos exteriores ao contorno de R. A região I é formada pelas arestas que ligam consecutivamente os vértices 1-2-10-9-1 e a região V é limitada apenas pelas duas arestas que ligam os vértices 9 e 10.

Nas condições que descrevemos, consideremos agora o plano dividido em F regiões (sendo uma ilimitada), através de A arestas que concorrem em V vértices. Afirmamos que

$$V - A + F = 2.$$

Demonstração. A fórmula $V - A + F = 2$ vale no caso simples em que apenas um polígono de n lados está desenhado no plano. Neste caso,

$$A = V = n, \qquad F = 2.$$

Vamos usar indução para o caso geral, ou seja, vamos mostrar que se a relação de Euler vale para uma decomposição do plano em F regiões, então ela ainda vale para uma decomposição em $F+1$ regiões. Uma determinada decomposição pode ser construída por etapas onde, em cada uma delas, uma nova região é acrescentada no *oceano* das anteriores. Consideremos então uma decomposição do plano em F regiões através de A arestas que concorrem em V vértices (como mostra a parte em linhas cheias da figura 10.15), satisfazendo a relação de Euler. Acrescentamos agora uma nova região contida no oceano das regiões anteriores (como mostra a parte em linhas tracejadas da figura), desenhando uma seqüência de arestas ligando dois vértices do contorno da divisão anterior. Se acrescentamos r arestas, então acrescentamos $r-1$ vértices e uma nova região.

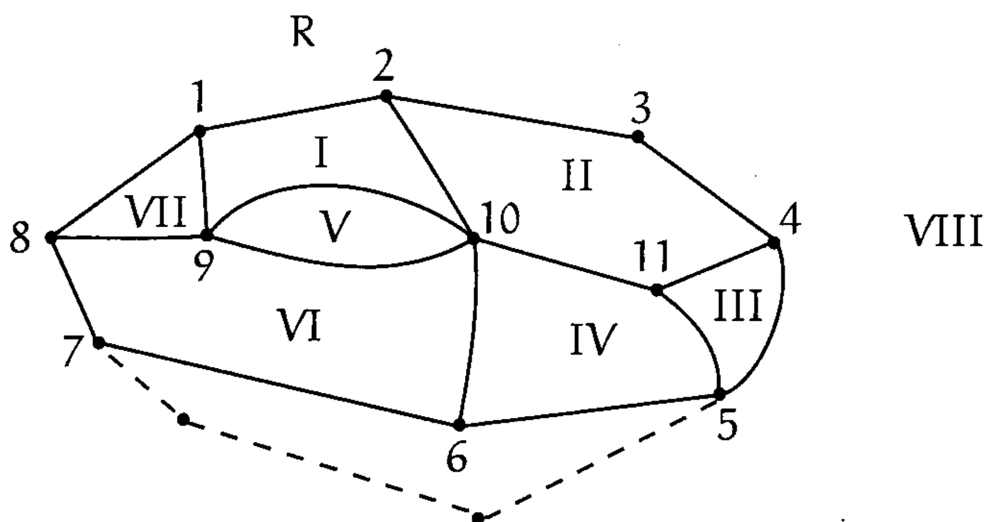


Fig. 10.15 - Acrescentando uma nova região.

Mas fica claro que a relação de Euler permanece válida porque

$$V - A + F = (V + r - 1) - (A - r) + (F + 1)$$

o que conclui a demonstração.

O caso plano do Teorema de Euler é um resultado importante na teoria dos *grafos*. Um grafo é apenas um conjunto de pontos com linhas que unem alguns pares de pontos desse conjunto. É uma coisa simples, mas propicia uma imagem geométrica de uma relação entre elementos de um conjunto. Para dar um exemplo elementar, suponha que em uma reunião entre pessoas, alguns cumprimentos foram feitos. Podemos visualizar graficamente essa situação representando as pessoas por pontos no plano onde, se a pessoa A cumprimentou a pessoa B, desenhamos uma linha ligando o ponto A ao ponto B. Pode ser que uma certa pessoa tenha cumprimentado muitas outras (ou mesmo todas as outras) e pode ter ocorrido que algumas pessoas não tenham cumprimentado ninguém. A figura que mostra essa relação é um *grafo*.

Grafos são utilizados em inúmeras áreas do conhecimento humano, com o objetivo de visualizar relações ou conexões entre elementos de um conjunto. Se, por exemplo, você vê em um mapa, cidades ligadas por estradas, esse desenho é um grafo, circuitos elétricos são grafos, desenhos de moléculas mostrando ligação entre átomos são grafos, etc. Mas, isto é outra história. O leitor que tiver interesse nesse assunto poderá encontrar diversos livros dedicados à teoria dos grafos. Para citar apenas um, o livro "Graphs and their uses" de Oystein Ore, publicado pela MAA (Mathematical Association of America) é uma excelente referência para uma primeira leitura.

Exercícios

1. Um poliedro convexo de 20 arestas e 10 vértices só possui faces triangulares e quadrangulares. Determine os números de faces de cada gênero.

2. Diagonal de um poliedro é qualquer segmento que une dois vértices que não estão na mesma face. Quantas diagonais possui o icosaedro regular?

3. Mostre que para todo poliedro convexo valem as desigual-

dades

a) $A + 6 \leqslant 3F$

b) $A + 6 \leqslant 3V$

4. Mostre que se um poliedro convexo tem 10 arestas então ele tem 6 faces.

5. Descreva todos os poliedros que possuem 10 arestas.

6. Um poliedro convexo P possui A arestas, V vértices e F faces. Com bases em cada uma das faces constroem-se pirâmides com vértices exteriores a P. Fica formado então um poliedro P' que só possui faces triangulares. Determine os números de arestas, faces e vértices de P'.

7. Um cubo de aresta a é seccionado por planos que cortam, cada um, todas as arestas concorrentes num vértice em pontos que distam x $(x < a/2)$ deste vértice. Retirando-se as pirâmides formadas, obtém-se um poliedro P. Descreva esse poliedro e calcule seu número de diagonais.

8. Considerando o poliedro P do exercício anterior, suponha agora que P tem todas as arestas iguais. Calcule, em função de a o comprimento de sua aresta.

Os exercícios a seguir tratam de grafos. Nos dois primeiros pode-se utilizar o caso plano da relação de Euler. Os três últimos dependem apenas do seu raciocínio.

9. Veja mapa da América do Sul. Existem 13 países mais o oceano, que também consideramos um "país". Observa-se que não existe nenhum ponto que pertença a mais de 3 países. Quantas linhas de fronteira existem na América do Sul?

10. Na figura abaixo, as casas 1, 2 e 3 devem ser conectadas aos terminais de água (A), luz (L) e telefone (T). É possível fazer essas ligações sem que duas conexões se cruzem?

1 2 3

A L T

11. A cidade de Königsberg está situada nas margens do Mar Báltico, na foz do rio Pregel. No rio, existem duas ilhas ligadas às margens e uma à outra por sete pontes como se vê na figura abaixo.

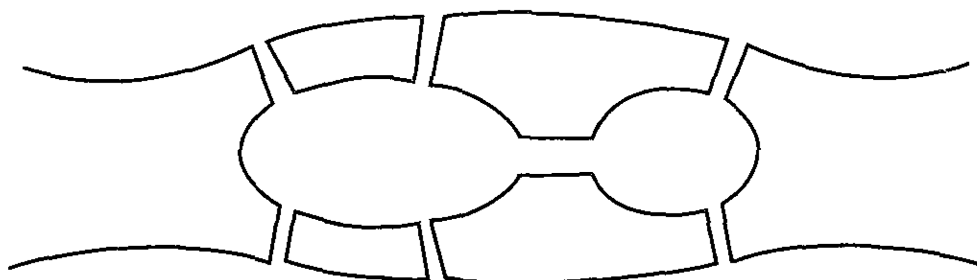


Fig. 10.16 - Königsberg.

O povo, que passeava dando voltas por estas ilhas, descobriu que, partindo da margem sul do rio, não conseguia planejar um trajeto de modo a cruzar cada uma das pontes uma única vez. Explique porque isto não é possível.

12. Verifique se o desenho abaixo pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar por cima de uma linha já traçada.

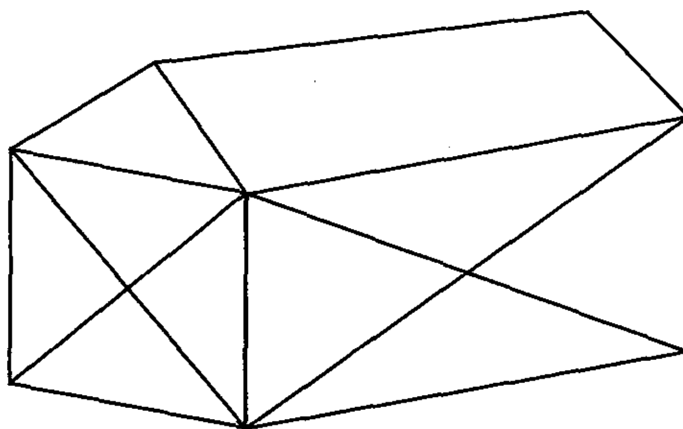


Fig. 10.17 - Um desafio.

13. Entre pessoas, suponha que a relação "conhecer" seja simétrica, ou seja, se A conhece B então B conhece A. Prove que, se 6 pessoas são escolhidas ao acaso, ou existem 3 que se conhecem, ou existem 3 que se desconhecem.

Capítulo 11

Volumes e Áreas

11.1 Introdução

Vamos tratar agora dos volumes dos sólidos simples: prismas, pirâmides, cilindros, cones e a esfera. Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço" através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado de volume.

Por exemplo, podemos medir o volume de uma panela tomando como unidade uma xícara. Enchendo a xícara de água e vertendo na panela sucessivas vezes até que esta fique completamente cheia, estamos realizando uma medida de volume. É possível que o resultado dessa comparação seja um número inteiro – digamos: 1 panela = 24 xícaras – mas é muito provável que na última operação sobre ainda um pouco de água na xícara. E como determinaremos essa fração?

O exemplo mostra que esse processo pode ter alguma utilidade em casos simples onde se necessita apenas de um valor aproximado para o volume, mas não funciona, mesmo na prática, para inúmeros objetos. Ou porque são muito pequenos, ou porque são grandes demais, ou simplesmente porque são completamente sólidos. Ainda, a unidade xícara, que é inclusive muito utilizada nas receitas da boa cozinha, não é naturalmente adequada a um estudo mais geral. Vamos então combinar que:

a unidade de volume é o cubo de aresta 1

Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então a unidade correspondente de volume será chamada de centímetro cúbico (cm^3). Assim, o volume de um sólido S deve ser o número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Mas, como esse sólido pode ter uma forma bastante irregular, não fica claro o que significa o número de vezes que um sólido contém esse cubo. Vamos então tratar de obter métodos que nos permitam obter fórmulas para o cálculo de volumes dos sólidos simples.

11.2 O Paralelepípedo Retângulo

O paralelepípedo retângulo (ou simplesmente um bloco retangular) é um poliedro formado por 6 retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c).

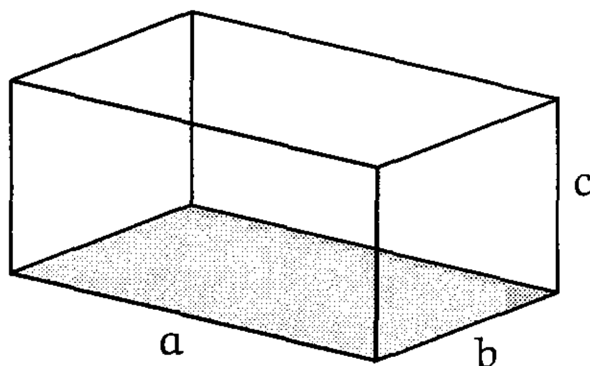


Fig. 11.1 - Paralelepípedo retângulo.

O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por $V(a, b, c)$ e como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimento, largura e altura medem 1, então $V(1, 1, 1) = 1$.

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que se mantivermos, por exemplo, constantes a largura e a altura e se multiplicarmos o comprimento por um número

natural n, o volume ficará também multiplicado por n, ou seja,

$$V(na, b, c) = n\,V(a, b, c)$$

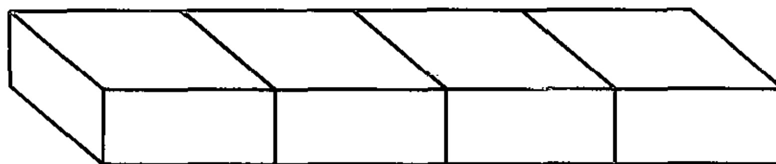


Figura 11.2

A figura 11.2 mostra 4 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colados em faces iguais. Naturalmente, o volume total é 4 vezes maior que o volume de um deles.

Este fato, constatado para números naturais, também vale para qualquer número real positivo (veja Notas 1 e 2 no fim desta seção) e isto quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a\cdot 1, b, c) \\ &= aV(1,b,c) = aV(1, b\cdot 1, c) \\ &= abV(1,1,c) = abV(1,1,c\cdot 1) = abcV(1,1,1) \\ &= abc\cdot 1 \\ &= abc \end{aligned}$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de *base* e a dimensão c de *altura*. Como o produto ab é área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela altura.

Volume do paralelepípedo = (área da base) × (altura).

Nota 1. Utilizamos aqui um fato completamente intuitivo (mas que na verdade é um axioma) que é o seguinte. Se dois sólidos são

tais que possuem em comum, no máximo pontos de suas cascas, então o volume da união de dois é a soma dos volumes de cada um.

Para explicar melhor, dizemos que um ponto P é interior a um sólido S quando existe uma esfera de centro P inteiramente contida em S. Quando P pertence a S mas não existe tal esfera, dizemos que P está na casca de S (ou na superfície de S). Isto é o que nos permite usar termos como "justapor" ou "colar" dois sólidos. Ainda, permite dizer que se um sólido está dividido em vários outros, então seu volume é a soma dos volumes de suas partes.

Nota 2. O conceito de proporcionalidade é extremamente importante na Matemática elementar. Em particular na geometria, existem ocasiões em que certos resultados são facilmente verificados quando as medidas são números naturais (ou mesmo racionais), mas o que se torna um problema é estender esses mesmos resultados para números reais. O que resolve essa constrangedora situação é o teorema fundamental da proporcionalidade, que diz o seguinte:

Teorema. Sejam x e y grandezas positivas. Se x e y estão relacionadas por uma função crescente f tal que para todo natural n, $f(nx) = nf(x)$, então para todo real r, tem-se que $f(rx) = rf(x)$.

Em palavras mais simples, dizemos que duas grandezas positivas x e y são proporcionais quando, se a primeira for multiplicada por um número natural n, então a segunda fica também multiplicada por n. Esse teorema nos garante que, neste caso, se a primeira grandeza for multiplicada por um número real r, a segunda grandeza também fica multiplicada por r. A demonstração deste belo teorema pode ser encontrada no livro "Meu Professor de Matemática" de Elon Lages Lima na página 127.

Não estamos aqui estimulando o professor do segundo grau que faça essa demonstração em sala de aula. Muito pelo contrário. Estamos dizendo que se o professor der, para os estudantes do segundo grau, alguma justificativa de um importante resultado

utilizando números naturais, ou mesmo racionais, esse procedimento não é um erro, deve ser feito dessa forma, e estará sendo adequado ao nível de desenvolvimento dos seus alunos. Por outro lado, o professor ficará consciente que, mesmo não podendo fazer a demonstração completa, estará fornecendo argumentos corretos, e deixando a generalização para um estágio posterior.

11.3 O Princípio de Cavalieri

Conseguimos estabelecer a fórmula do volume de um paralelepípedo retângulo, mas não é fácil ir adiante sem ferramentas adicionais. Uma forma confortável de prosseguir é adotar como axioma um resultado conhecido como o Princípio de Cavalieri.

Antes de enunciá-lo, observe uma experiência que se pode fazer para os alunos. Ponha em cima da mesa, uma resma de papel. Estando ainda perfeitamente bem arrumada, ela é um paralelepípedo retângulo (fig. 11.3a) e, portanto, tem um volume que podemos calcular. Encostando uma régua nas faces laterais, podemos transformar o paralelepípedo retângulo em um outro oblíquo (fig. 11.3b) ou, usando as mãos, poderemos moldar um sólido bem diferente (fig. 11.3c).

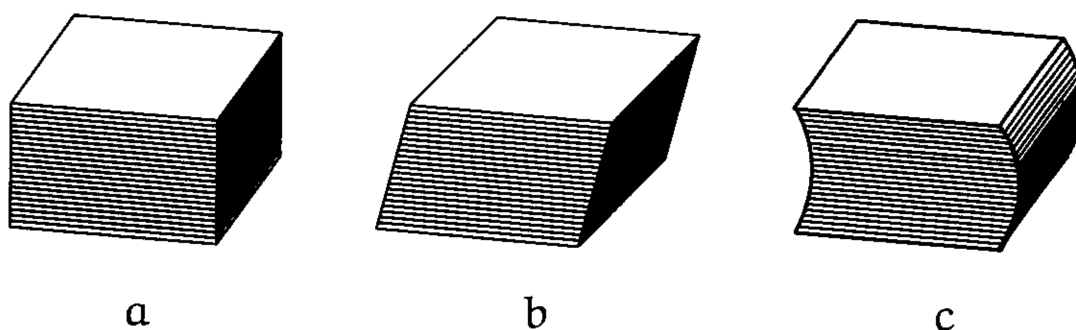


Fig. 11.3 - Pilhas de papel.

Sabemos que esses três sólidos têm volumes iguais mas ainda nos faltam argumentos para explicar esse fato que intuitivamente percebemos. De uma forma mais geral, suponha que dois sólidos A e B estão apoiados em um plano horizontal e que qualquer outro plano também horizontal corte ambos segundo seções de mesma

área. O Princípio de Cavalieri afirma que o volume de A é igual ao volume de B.

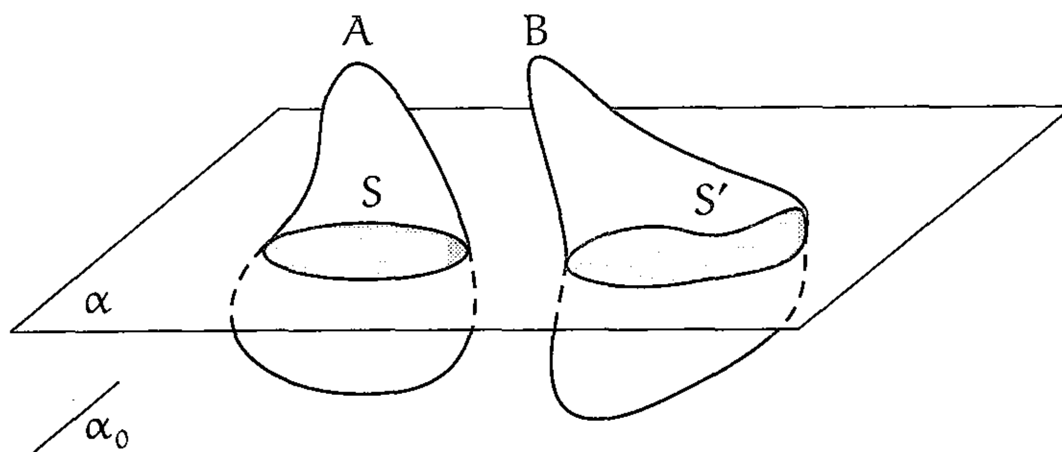


Figura 11.4

Se imaginarmos os dois sólidos fatiados no mesmo número de fatias muito finas, todas com mesma altura, duas fatias correspondentes com mesma área terão, aproximadamente, mesmo volume. Tanto mais aproximadamente quanto mais finas forem. Sendo o volume de cada sólido a soma dos volumes de suas fatias, concluímos que os dois sólidos têm volumes iguais. Repare ainda que o exemplo da resma de papel mostra um caso particular desse argumento, onde os três sólidos possuem, cada um, 500 fatias, todas iguais.

É claro que os exemplos acima não constituem uma demonstração do Princípio de Cavalieri mas dão uma forte indicação de que ele é verdadeiro. Podemos então aceitar o axioma seguinte:

Axioma (Princípio de Cavalieri)

São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.

Esta é a ferramenta que vamos utilizar para encontrar os volumes dos demais sólidos simples.

Nota 3. No ensino da Geometria existem alguns resultados que não podemos demonstrar de forma satisfatória e que, natural-

mente, causam incômodo ao professor. Os principais são os seguintes: o Teorema de Tales (das paralelas), a área do quadrado, o volume do paralelepípedo e o Princípio de Cavalieri. Para os três primeiros temas, o professor poderá oferecer uma demonstração parcial utilizando números naturais (ou mesmo racionais) que deve satisfazer a maioria dos alunos. Essa atitude não é condenável, muito pelo contrário. O professor estará justificando importantes resultados de acordo com o nível de desenvolvimento dos seus alunos, mas saberá que o resultado geral estará garantido pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (veja Nota 2 deste capítulo). Existem outras opções e uma delas é adotar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (como fato que poderá ser demonstrado mais tarde) e a partir dele, demonstrar a área do retângulo, do triângulo e daí o Teorema de Tales. Para esse caminho, o leitor poderá consultar o artigo "Usando Áreas" na RPM nº 21, pág. 19. Foi esse o caminho que utilizamos aqui para obter o volume do paralelepípedo e não há dúvida que esse procedimento satisfaz a nossa necessidade imediata mas transfere a dificuldade para outro lugar. Não tem jeito. Existem obstáculos no percurso do ensino da Geometria e o professor, consciente das dificuldades, deverá optar pelo rumo a tomar. No caso do Princípio de Cavalieri a situação é diferente. A sua demonstração envolve conceitos avançados de Teoria da Medida e portanto só podemos oferecer aos alunos alguns exemplos. Mas, cremos que esses exemplos sejam suficientes para que possamos adotar sem traumas o Princípio de Cavalieri como axioma.

11.4 O Prisma

Com o Princípio de Cavalieri, podemos obter sem dificuldade o volume de um prisma. Imaginemos um prisma de altura h, e cuja base seja um polígono de área A, contido em um plano horizontal. Construímos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h e de forma que sua base seja um retângulo de área A.

Suponha agora que os dois sólidos sejam cortados por um ou-

tro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Ora, o paralelepípedo é também um prisma e sabemos que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base. Logo, como figuras congruentes têm mesma área, temos que $A_1 = A = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos têm mesmo volume. Como o volume do paralelepípedo é Ah, o volume do prisma é também o produto da área de sua base por sua altura.

$$\text{Volume do prisma} = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

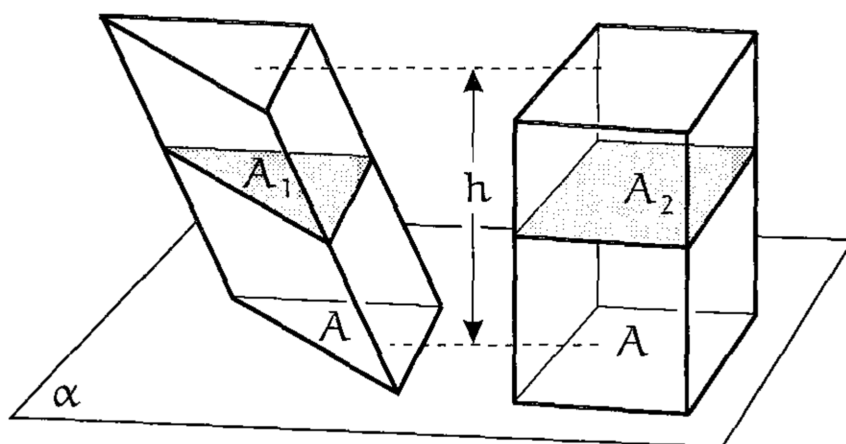


Figura 11.5

11.5 A Pirâmide

Para obter o volume da pirâmide, precisamos de resultados adicionais. Em particular, o que realmente importa é ter a certeza que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume dessa pirâmide não se altera. Para isso, vamos examinar o que ocorre quando uma pirâmide é seccionada por um plano paralelo à sua base.

A figura 5.6 a seguir mostra uma pirâmide de vértice V, base ABC (triangular apenas para simplificar o desenho) e altura H. Um plano paralelo a ABC, distando h do vértice V, produziu nessa pirâmide uma seção DEF.

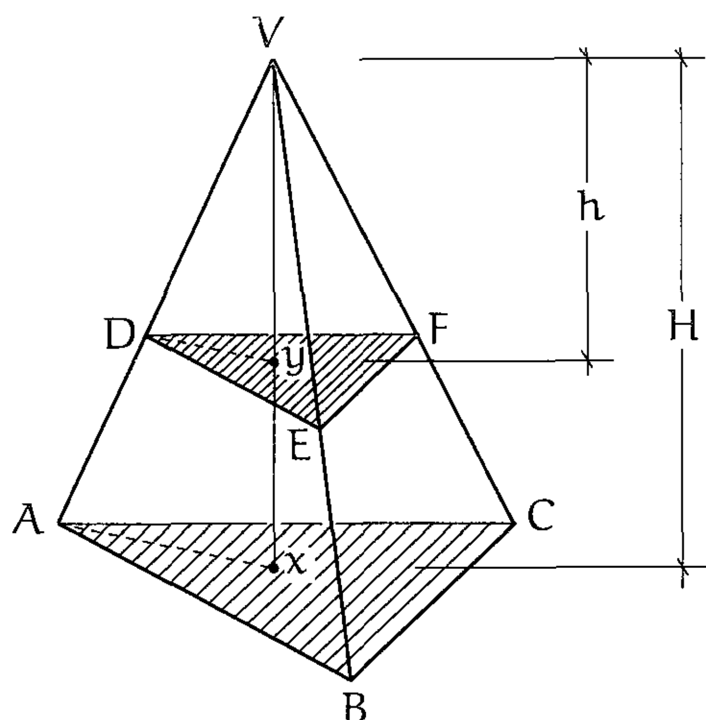


Figura 11.6

Vamos agora citar dois fatos importantes com respeito à situação acima.

1) A seção e a base da pirâmide são figuras semelhantes e a razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

2) A razão entre áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

O primeiro fato foi demonstrado no Capítulo 7 deste livro. A demonstração do segundo pode ser encontrada em diversos livros de Matemática do segundo grau. Para uma referência mais avançada, recomendamos o livro "Medida e Forma em Geometria" do professor Elon Lages Lima editado pela SBM, que trata também dos mesmos assuntos que estamos desenvolvendo aqui.

Passamos agora a um teorema preparatório para o que nos permitirá obter o volume da pirâmide.

Teorema. Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.

A figura a seguir mostra duas pirâmides de mesma base ABC (novamente triangular apenas para simplificação do desenho), vértices V_1 e V_2 e com mesma altura H. Um plano paralelo ao

plano (ABC) e distando h dos vértices das pirâmides, produziu seções S_1 e S_2 nas duas pirâmides.

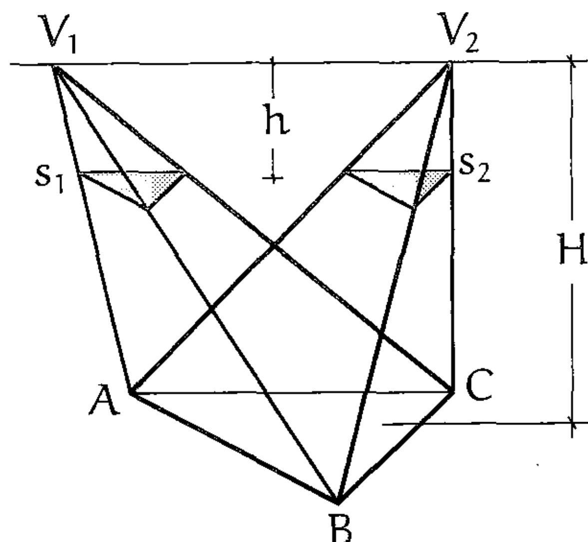


Figura 11.7

Seja A a área da base ABC e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente. Pelos argumentos que citamos, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

de onde se conclui que $A_1 = A_2$. Pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm mesmo volume, como queríamos demonstrar.

O fato que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para a demonstração do volume da pirâmide de base triangular. Veremos isto no teorema seguinte.

Teorema. O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

A demonstração deste teorema é elementar mas requer atenção. Para facilitar o entendimento, vamos convencionar uma notação especial. Trataremos de diversos tetraedros e como em um tetraedro qualquer face pode ser considerada uma base, vamos convencionar o seguinte. Se em um tetraedro de vértices A, B C e D, imaginamos a face ABC como base e o ponto D como vértice

dessa pirâmide, vamos representá-lo por $D - ABC$. Ainda, o volume desse tetraedro será representado por

$$V(D - ABC) = V(B - ACD) = \ldots, \text{etc},$$

dependendo de qual face estamos considerando como base.

Consideremos então um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e $A'B'C'$, como mostra a figura 11.8.

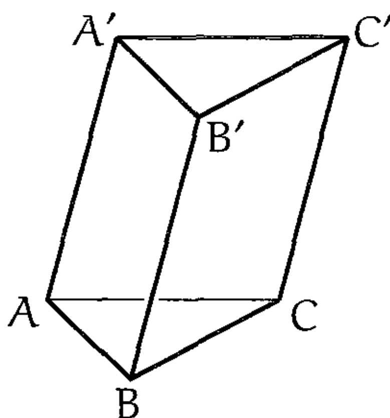


Figura 11.8

Seja A a área de ABC e seja h a altura do prisma. Como sabemos, seu volume é Ah. Vamos agora, dividir esse prisma em três tetraedros: $A - A'B'C'$, $B' - ACC'$ e $B' - ABC$, como mostram as figuras a seguir.

Sejam V_1, V_2 e V_3 os volumes respectivos dos três tetraedros citados e seja V o volume do prisma. Pelo teorema anterior, sabemos que o volume de uma pirâmide não se modifica quando, mantendo a base fixa, movemos o vértice em um plano paralelo a essa base. Tendo isto em mente podemos concluir:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(A - A'B'C') = V(A - A'BC') \\ &= V(A - A'BC) = V(A' - ABC) \\ V_2 &= V(B' - ACC') = V(B - ACC') = V(C' - ABC) \\ V_3 &= V(B' - ABC) \end{aligned}$$

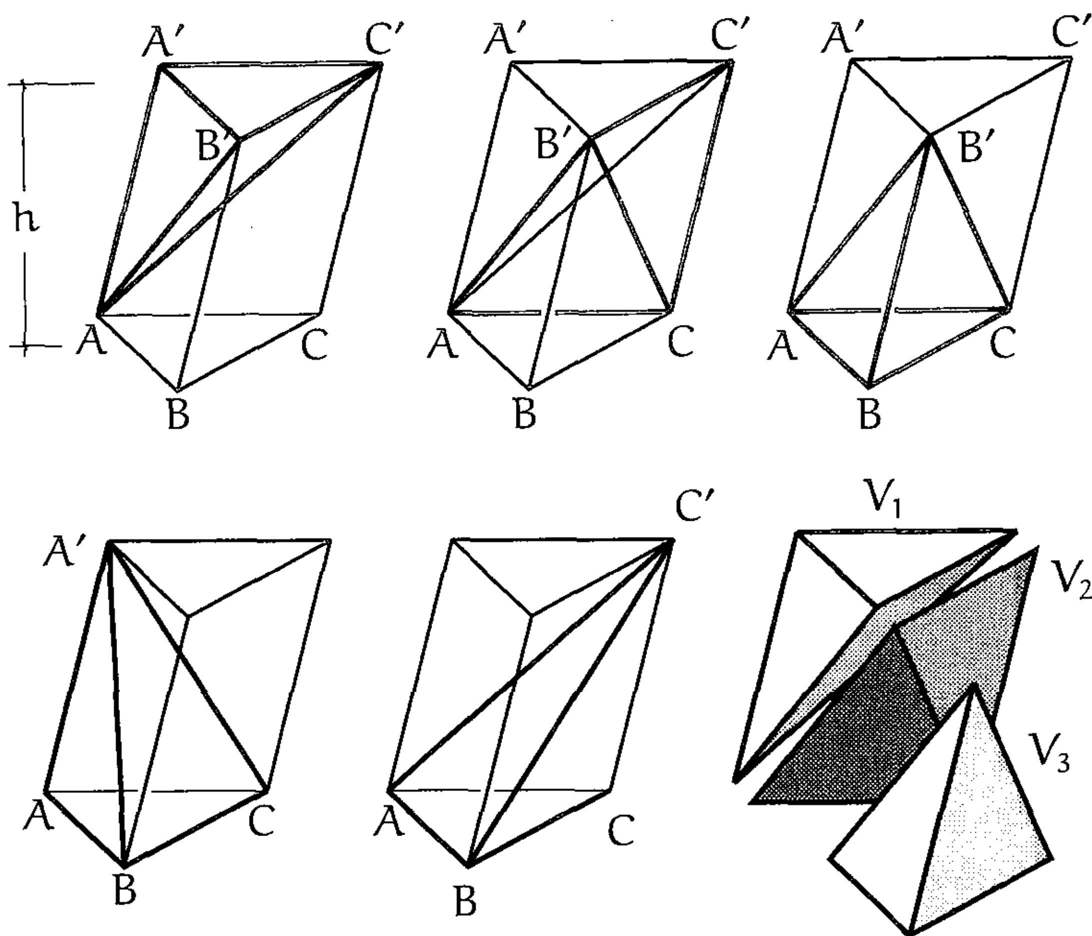


Fig. 11.9 - Decompondo o prisma em tetraedros de mesmo volume.

Concluímos então que o volume do prisma é igual à soma dos volumes de três tetraedros:

$$A' - ABC, B' - ABC \text{ e } C' - ABC,$$

com a mesma base do prisma e com alturas iguais a do prisma. Logo, cada um deles tem volume igual a um terço do volume do prisma. Demonstramos então que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Estamos agora muito próximos do resultado geral. O teorema a seguir estende o resultado obtido para qualquer pirâmide.

Teorema. O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

Para justificar, observe que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide.

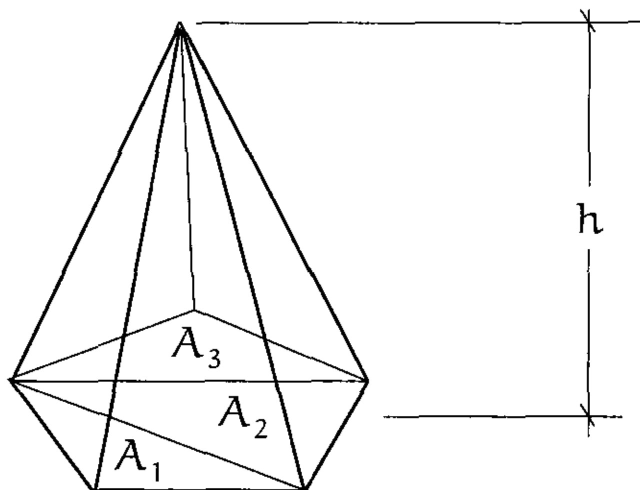


Figura 11.10

Suponha agora que a pirâmide tenha altura h e que sua base, de área A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas

$$A_1, A_2, \ldots, A_n.$$

Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é:

$$V = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \cdots + \frac{1}{3}A_nh$$

$$V = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)h$$

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

como queríamos demonstrar. Fica então estabelecido que:

$$\text{volume da pirâmide} = \frac{1}{3}\,(\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

A obtenção dos volumes do prisma e da pirâmide demanda considerável esforço. É conveniente que após esses resultados, o

professor os explore em diversos sólidos particulares, em particular, prismas e pirâmides regulares. Para encontrar os elementos necessários para o cálculo do volume de um desses poliedros, será freqüentemente necessário encontrar triângulos convenientes, aplicar relações métricas e calcular áreas, propiciando uma revisão dos resultados importantes da geometria plana.

Quando prismas e pirâmides são apresentados ao aluno do segundo grau, a motivação natural é o cálculo dos volumes. Entretanto, paralelamente a isso, diversas outras relações métricas e propriedades desses poliedros devem ser estudadas, como fizemos no Capítulo 9.

11.6 Cilindros e Cones

No cilindro, toda seção paralela à base, é congruente com essa base. Esse fato, permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela sua altura.

Se o cilindro tem altura h e base de área A contida em um plano horizontal, imaginamos um prisma qualquer (ou em particular um paralelepípedo retângulo) de altura h, com base de área A contida no mesmo plano. Se um outro plano horizontal secciona os dois sólidos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então $A_1 = A = A_2$ e por conseqüência, os dois têm mesmo volume. Logo, o volume do cilindro é também o produto da área da base pela altura.

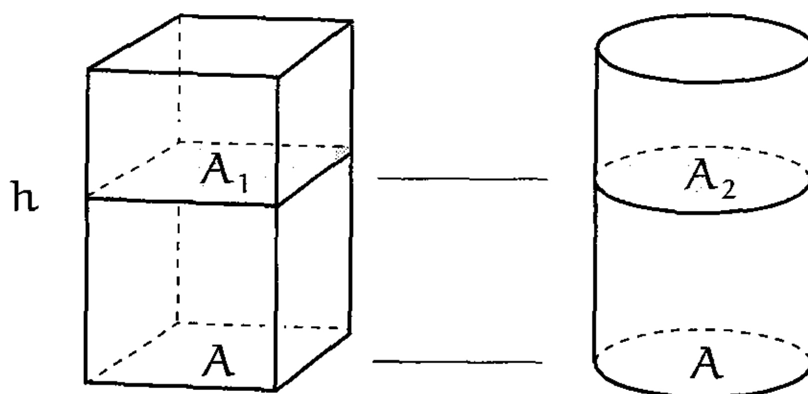


Figura 11.11

$$\text{Volume do cilindro} = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

A relação entre o prisma e o cilindro é a mesma que entre a pirâmide e o cone, ou seja, o primeiro é caso particular do segundo. Optamos por demonstrar o volume do prisma e depois estender o resultado a um caso mais geral, o cilindro, porque esse é o caminho percorrido pela maioria dos professores da escola secundária. E concordamos com eles. O aluno do segundo grau, no seu primeiro contato com a geometria espacial, se sente mais seguro quando compreende bem resultados obtidos em situações particulares, para depois estendê-los em casos mais gerais. O matemático profissional gosta, freqüentemente, de fazer o inverso, ou seja, demonstrar um resultado geral e depois citar os casos particulares em que o mesmo vale.

O volume do cone segue o mesmo caminho trilhado anteriormente. Se um cone tem altura H e base de área A contida em um plano horizontal, consideramos uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano.

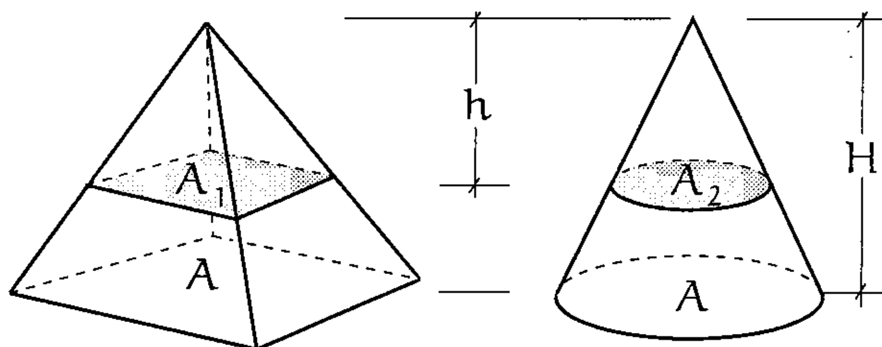


Figura 11.12

Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, então:

$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A}$$

ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos têm mesmo volume e portanto concluímos que o volume do

cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do cone} = \frac{1}{3}\,(\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

Os casos mais interessantes para os alunos são os cilindros e cones retos de base circular porque eles estão mais relacionados com os objetos do cotidiano. Ainda, nesses objetos, a superfície lateral pode ser obtida de forma simples.

A superfície lateral de um cilindro reto de raio R e altura h, pode ser desenrolada e transformada em um retângulo de base $2\pi R$ e altura h. A área lateral do cilindro é igual à área desse retâgulo, que vale $2\pi Rh$.

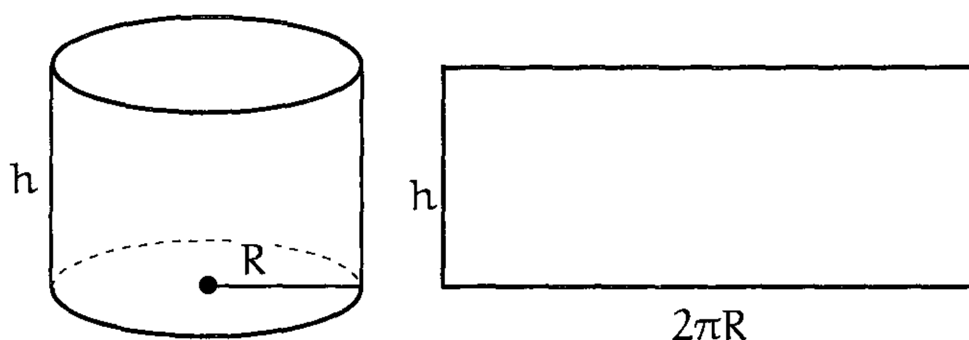


Fig. 11.13 - Área lateral do cilindro $= 2\pi Rh$.

A superfície lateral de um cone reto de raio R e geratriz g, pode ser desenrolada e transformada em um setor de raio g cujo arco tem comprimento $2\pi R$. A área A desse setor é igual à área lateral do cone e para calculá-la, usaremos apenas uma elementar regra de três. Diremos que a área A desse setor está para a área do círculo de raio g, assim como o comprimento do arco $2\pi R$ está para o comprimento total da circunferência $2\pi g$. Com isso, concluímos que a área lateral do cone reto vale πRg.

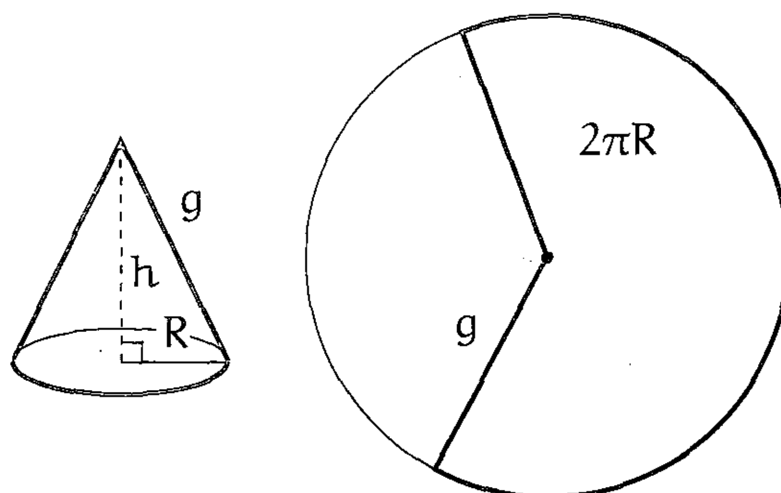


Fig. 11.14 - Área lateral do cone = $\pi R g$.

O leitor deve reparar que, ao utilizar a regra de três, estamos usando o fato que a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco que ele subtende (veja Nota 2 deste capítulo).

11.7 Atividades para Sala de Aula

Cilindros e cones retos de base circular devem ser associados às suas esferas inscrita e circunscrita. Além disso, inúmeras embalagens de produtos são cilíndricas, o que fornece diversos problemas interessantes. Vamos listar algumas atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos.

1. O *cilindro equilátero* (isto é, o cilindro circular reto em que a altura é igual ao diâmetro da base) possui uma interessante propriedade. De todos os cilindros de mesmo volume, o cilindro equilátero é o que possui a menor área total. Assim, se o industrial deseja comercializar seu produto em embalagens cilíndricas que gastem um mínimo de material em sua fabricação, ele deve preferir o cilindro equilátero. É o caso, por exemplo das latas de leite condensado. Elas são cilindros equiláteros. A demonstração dessa propriedade requer o uso de cálculo e, portanto, não está ainda acessível aos alunos do segundo grau. Entretanto, o professor poderá calcular a área de um cilindro equilátero e depois

calcular a área de um outro cilindro com mesmo volume, para que os alunos vejam que é maior.

2. Quando se desenrola a superfície lateral de um cone, obtemos um setor. É interessante investigar o valor do ângulo central desse setor. Esse ângulo define a *forma* do cone. Se o cone tiver um raio pequeno comparado com sua altura (tipo chapéu de bruxa), o ângulo do setor será pequeno. Se, por outro lado, o raio do cone for grande quando comparado com sua altura (tipo chapéu de chinês), o ângulo do setor será também grande. O professor poderá demonstrar, utilizando também uma regra de três que o ângulo desse setor é, em radianos, igual a $2\pi R/g$ e com isso mostrar que no cone equilátero (cone que tem a geratriz igual ao diâmetro da base), esse ângulo é de 180°.

11.8 A Esfera

O volume da esfera será obtido também como aplicação do Princípio de Cavalieri. Para isso, devemos imaginar um certo sólido, de volume conhecido e tal que seções produzidas por planos horizontais na esfera e nesse sólido tenham áreas iguais. Repare que em uma esfera de raio R, uma seção que dista h do centro é um círculo de área $\pi(R^2 - h^2)$. Mas esta é também a área de uma coroa circular limitada por circunferências de raios R e h.

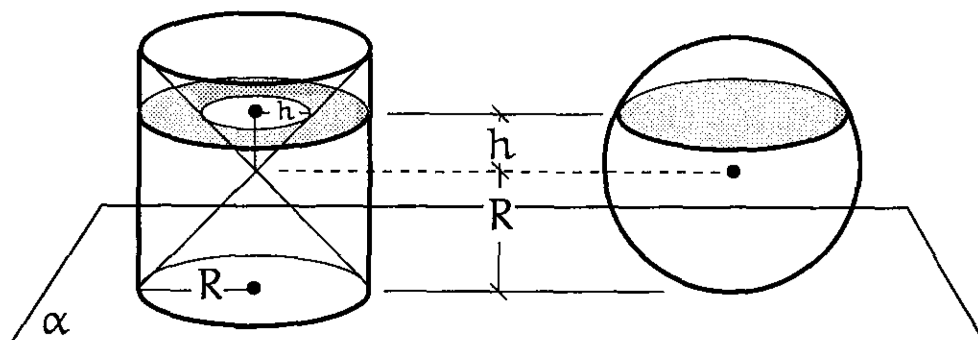


Figura 11.15

Consideremos então uma esfera de raio R apoiada em um plano horizontal e, ao lado, um cilindro equilátero de raio R com

base também sobre esse plano. Do cilindro, vamos subtrair dois cones iguais, cada um deles com base em uma base do cilindro e vértices coincidentes no centro do cilindro. Este sólido C (chamado *clépsidra*) é tal que qualquer plano horizontal distando h do seu centro (ou do centro da esfera, o que é o mesmo), produz uma seção que é uma coroa circular cujo raio externo é R e cujo raio interno é h. Logo, o volume da esfera é igual ao de C.

O volume de C é o volume do cilindro de raio R e altura 2R subtraido de dois cones de raio R e altura R. Isso dá:

$$\pi R^2 \, 2R - 2\frac{1}{3}\pi R^2 \, R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

que é o volume da esfera.

$$\text{Volume da esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Adotando o Princípio de Cavalieri, pudemos calcular o volume da esfera. Entretanto, a área da esfera não pode ser obtida pelo método sugerido para o cilindro e para o cone. A superfície da esfera não é "desenvolvível", ou seja, não é possível fazer cortes nela e depois aplicá-la sobre um plano sem dobrar nem esticar.

Qualquer que seja o método que imaginarmos para obter a área da esfera, em algum momento precisaremos de uma "passagem ao limite". Entretanto, para justificar o valor $4\pi R^2$ para a área da esfera ao aluno do segundo grau, existem processos que, apesar de não constituírem uma demonstração, tornam esse resultado bastante aceitável. Um deles, está no livro Medida e Forma em Geometria, pág. 81 o outro pode ser o seguinte. Suponha a esfera de raio R, dividida em um número n muito grande de regiões, todas com área e perímetro muito pequenos. Como se a esfera estivesse coberta por uma rede de malha muito fina. Cada uma dessas regiões, que é "quase" plana se n for muito grande, será base de um cone com vértice no centro da esfera. Assim, a esfera ficará dividida em n cones, todos com altura aproximadamente igual a R (tanto mais aproximadamente quanto menor for a base do cone).

Se A é a área da esfera e $A_1, A_2, \ldots, A_n$, são as áreas das diversas regiões, temos:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}A_1R + \frac{1}{3}A_2R + \cdots + \frac{1}{3}A_nR$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)R$$
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}AR$$
$$A = 4\pi R^2$$

É preciso deixar claro que esses cálculos não demonstram nada. Afinal, usamos a palavra "aproximadamente" muitas vezes e com significado pouco preciso. No ensino do segundo grau, atitudes desse tipo são corretas. Se não podemos demonstrar certo resultado, deveremos mostrar argumentos que, pelo menos os façam plausíveis, aceitáveis, e dizer honestamente aos alunos, que a demonstração requer o uso de Cálculo ou de outras ferramentas que eles vão aprender depois. Afinal de contas, a forma de ensinar e os argumentos que podemos utilizar, dependem do nível de desenvolvimento dos estudantes. Como dizia o professor Zoroastro, a verdade nem sempre pode ser dita de uma vez só.

11.9 Atividades para Sala de Aula

Utilizamos a palavra esfera com dois significados. Ora ela representa a superfície, a casca do sólido. Ora ela representa o interior. Não há problema nisso. Repare que na geometria plana, o mesmo já ocorria. Por exemplo, a palavra quadrado era utilizada tanto para representar a união dos quatro lados (o bordo) quanto para o interior. Os estudantes deverão compreender o significado de acordo com a situação que está sendo estudada.

Sugerimos algumas atividades relacionadas com áreas e volumes na esfera.

1. Para praticar as fórmulas de área e de volume, é interessante demonstrar o seguinte fato descoberto por Arquimedes: se uma

esfera está inscrita em um cilindro (reto) então a razão entre as áreas desses sólidos é igual à razão entre seus volumes.

2. O professor pode também pedir aos alunos para calcular a área e o volume de um fuso esférico (isto é, a região delimitada por dois meridianos). É simples convencê-los de que tanto a área como o volume de um fuso esférico é proporcional ao ângulo desse fuso. Portanto, se α é a medida em graus do ângulo de um fuso em uma esfera de raio R, a área desse fuso será

$$\frac{\alpha}{360} 4\pi R^2$$

e seu volume será

$$\frac{\alpha}{360} \times \frac{4\pi R^2}{3}.$$

3. É bom aproveitar as fórmulas da área e do volume da esfera (em que aparecem, respectivamente, R^2 e R^3) para reforçar o fato de que as razões entre áreas e volumes de figuras semelhantes são iguais, respectivamente, ao quadrado e ao cubo da razão de semelhança. O professor pode, por exemplo, perguntar aos alunos que relação existe entre as massas de duas bolas de gude, uma com raio igual ao dobro do da outra.

Exercícios

1. Uma piscina tem 10m de comprimento, 6m de largura e 1,6m de profundidade.

a) Calcule seu volume em litros.

b) Determine quantos ladrilhos quadrados com 20cm de lado são necessários para ladrilhar essa piscina.

2. Um tablete de doce de leite medindo 12cm por 9cm por 6cm, está inteiramente coberto com papel laminado. Esse tablete é dividido em cubos com 1cm de aresta.

a) Quantos desses cubos não possuem nenhuma face coberta com o papel laminado?

b) Quantos desses cubos possuem apenas uma face coberta com papel?
c) Quantos desses cubos possuem exatamente duas faces cobertas com papel?
d) Quantos desses cubos possuem três faces cobertas com papel?

3. Determine o volume do maior tetraedro que pode ser guardado dentro de um cubo de aresta a.

4. Considere um triângulo equilátero ABC de lado a. Pelo centro G do triângulo, considere um segmento GD perpendicular ao plano do triângulo.

a) Calcule o comprimento de GD para que os segmentos DA, DB e DC tenham também comprimento a.
b) Nas condições do item (a), o tetraedro ABCD é regular. Calcule então o volume de um tetraedro regular de aresta a.

5. Um cubo de aresta a é seccionado por oito planos. Cada plano contém os pontos médios das três arestas que concorrem em um vértice. Retirando-se os tetraedros formados obtemos um poliedro P.

a) Descreva as faces de P.
b) Calcule o volume de P.
c) Calcule o raio da esfera circunscrita ao poliedro P.

6. Calcule o volume de um octaedro regular de aresta a.

7. Calcule o volume do octaedro cujos vértices são os centros das faces de um cubo de volume V.

8. a) Mostre que a soma das distâncias de um ponto interior a um tetraedro regular às suas faces é constante.

b) A partir do item anterior, calcule o raio da esfera inscrita a um tetraedro regular de aresta a.

9. Uma pirâmide chama-se <u>regular</u> quando a sua base é um polígono regular e a projeção do vértice sobre o plano da base é o seu centro.

Uma pirâmide regular de altura 4cm tem por base um quadrado de lado 6cm. Calcule seu volume, sua área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

10. Um cilindro reto possui uma esfera inscrita. Mostre que a razão entre as áreas desses dois sólidos é igual à razão entre seus volumes (Teorema de Arquimedes).

11. Um copo cônico de papel foi feito a partir de um setor de 12cm de raio e ângulo central de 120°. Calcule o volume desse copo.

12. Um cone reto tem 3cm de raio e 4cm de altura. Calcule seu volume, área e os raios das esferas inscrita e circunscrita.

13. Um copo cilíndrico tem 3cm de raio e 12cm de altura. Estando inicialmente cheio d'água o copo é inclinado até que o plano de sua base faça 45° com o plano horizontal. Calcule o volume de água que permaneceu no copo.

14. Teorema: Se dois sólidos são semelhantes com razão de semelhança k, então a razão entre seus volumes é k^3.

Demonstre este teorema em casos particulares utilizando paralelepípedo retângulo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

15. Uma garrafa de bebida com 30cm de altura tem uma miniatura perfeitamente semelhante com 10cm de altura. Se a miniatura tem 50ml de volume, qual é o volume da garrafa original?

16. Um cone tem altura h e volume V. Este cone é seccionado por um plano paralelo à sua base, distando $h/3$ dessa base. Calcule os volumes das partes em que esse cone ficou dividido.

17. Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone invertido com 12m de profundidade. Este tanque está completamente cheio com 27000 litros de água e 37000 litros de petróleo. Calcule a altura da camada de petróleo.

18. Utilizando um pouco de cálculo (ou de imaginação).

Um fabricante de leite condensado deseja comercializar seu produto em embalagens cilíndricas de volume V. Determine as dimensões dessa embalagem para que seja gasto um mínimo de material em sua fabricação (ou seja, a superfície da lata deve ser mínima).

19. O professor perguntou ao aluno qual seria o volume gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados. O aluno respondeu corretamente, calculando o volume de um cilindro. Em seguida o professor traçou a diagonal do retângulo e perguntou ao aluno quais seriam os volumes gerados pelos dois triângulos formados. O aluno então dividiu a resposta anterior por dois. Está certo isso?

Capítulo 12

Superfícies e Sólidos de Revolução

12.1 Introdução

Consideremos em um plano, uma reta E chamada eixo e uma linha L, simples, que não corta esse eixo. Imagine que essa linha "gire" em torno do eixo, ou seja, cada ponto L descreva uma circunferência em um plano perpendicular a E e com centro sobre E.

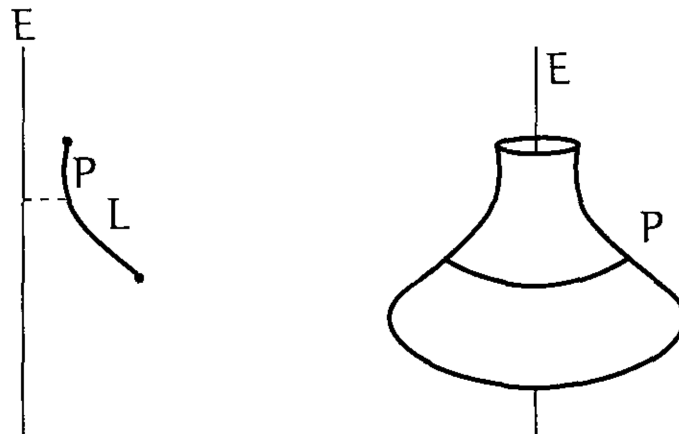


Figura 12.1

Cada ponto $P \in L$ percorre então uma circunferência cujo raio é a sua distância ao eixo e a reunião de todas essas circunferências é chamada uma *superfície de revolução*. Se a linha L for fechada ou se seus dois extremos pertencerem ao eixo, a superfície de revolução delimita um sólido chamado *sólido de revolução*. (Veja figura 12.2)

Repare que a rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados produz um cilindro, a rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos catetos produz um cone e a rotação de uma semi-circunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro produz uma esfera. (Veja figura 12.3)

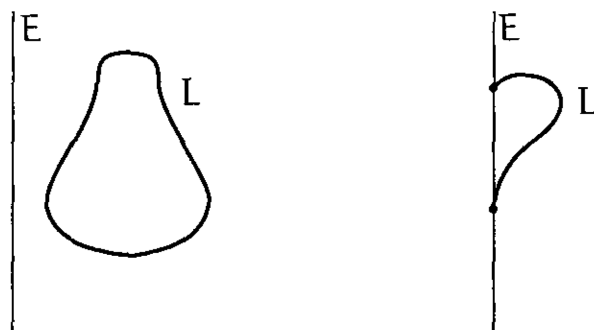


Figura 12.2

Neste capítulo, vamos estudar superfície e sólidos de revolução tendo como objetivo principal a demonstração do Teorema de Pappus, que permite calcular as áreas das superfícies e os volumes dos sólidos de revolução. Mas, para isso, precisaremos introduzir novos conceitos e demonstrar resultados preliminares.

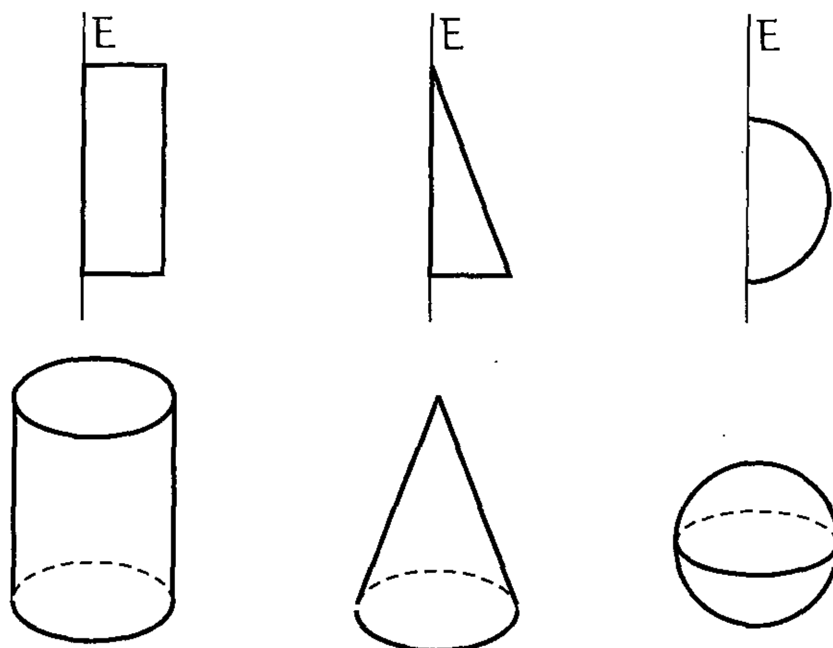


Figura 12.3

12.2 Centros de Gravidade

Todos nós temos uma noção intuitiva do que seja o *centro de gravidade* (ou baricentro) de uma figura plana. Esse ponto é tal que se fixarmos nele um fio, a figura pendurada por ele ficará em equilíbrio indiferente. Em particular, se a figura estiver em um plano horizontal, depois de pendurada permanecerá horizontal.

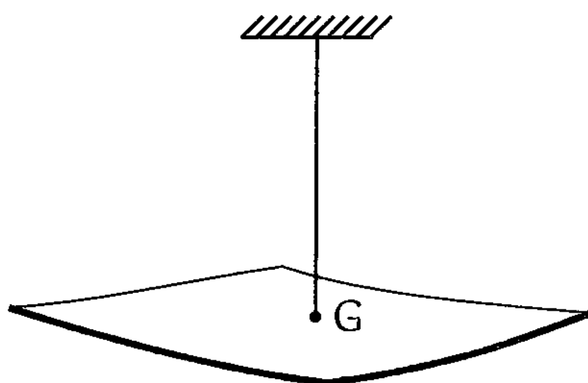


Figura 12.4

Podemos encontrar o baricentro de uma figura F por um processo prático que é o seguinte. Primeiro penduramos a figura por um ponto P_1 de seu bordo e traçamos sobre F a reta vertical que contém esse ponto, ou seja, a reta que contém o fio. Depois, penduramos a figura por um outro ponto P_2 de seu bordo e traçamos também sobre F a reta vertical que contém P_2. A interseção das duas retas é o baricentro de F.

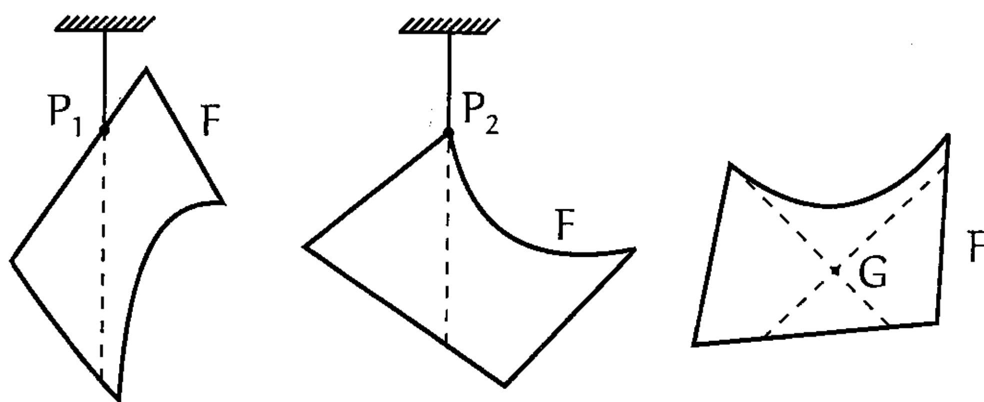


Fig. 12.5 - G é o baricentro da figura F.

Vamos agora observar que, quando desenhamos uma linha plana fechada simples (ou seja, sem auto-interseções), o termo "fi-

gura" pode se referir em geral tanto ao conjunto de pontos dessa linha, quanto ao conjunto dos pontos interiores. A palavra triângulo por exemplo, tanto pode se referir à união dos três lados quanto à região interior. Naturalmente que para a determinação do centro de gravidade é preciso saber que conjunto estamos considerando. Abaixo mostramos dois desenhos aparentemente iguais (fig. 12.6). Entretanto, no primeiro a figura consiste no conjunto dos pontos interiores à linha desenhada e no segundo a figura consiste apenas nos pontos da própria linha. Para dar uma idéia mais concreta ao que dissemos, imagine que no primeiro caso a figura foi recortada de uma chapa de madeira e no segundo caso, a figura foi feita apenas com arame. Os centros de gravidade dessas figuras são G_1 e G_2.

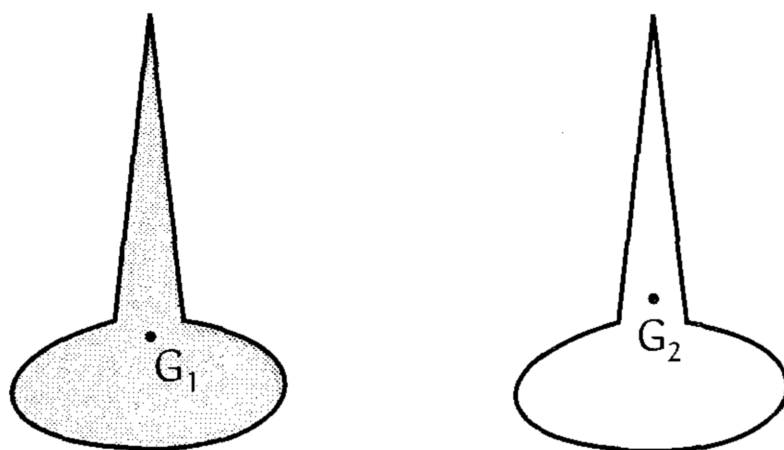


Figura 12.6

Vamos tratar agora de mostrar como se determina o centro de gravidade de figuras simples. Mas, para isso, devemos estabelecer como axiomas as proposições seguintes:

1) *O centro de gravidade de um segmento é o seu ponto médio.*

2) *Se uma figura possui um eixo de simetria então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo.*

Como conseqüência, se uma figura possui um *centro de simetria* (interseção de dois eixos de simetria), então esse ponto é o seu centro de gravidade.

12.3 Um Exemplo da Física

Consideremos uma barra reta (sem massa), tendo em suas extremidades massas m_1 e m_2. Essa barra, pendurada por um fio preso em um certo ponto G ficou em equilíbrio indiferente (fig. 12.7). Em relação a um plano horizontal Π, as duas massas possuem alturas y_1 e y_2, respectivamente. Pergunta-se a que altura está o ponto G.

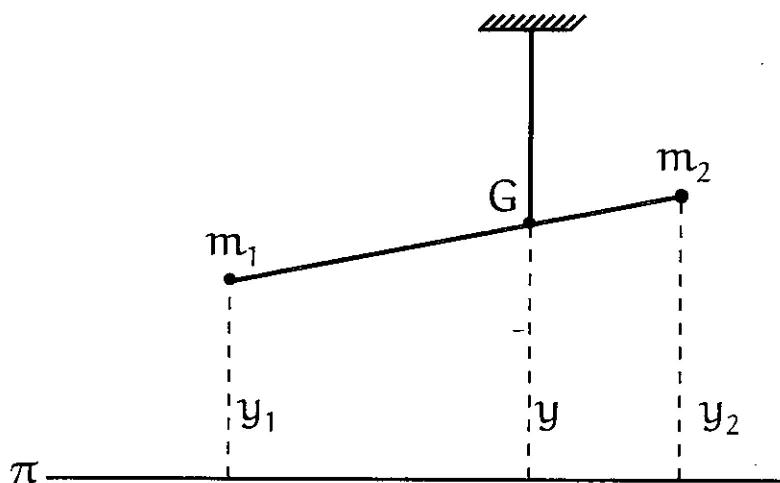


Figura 12.7

Para responder a essa pergunta, devemos recordar um outro conceito da Física: o de energia potencial. Sabe-se que a energia potencial de uma massa pontual m que está em equilíbrio acima de um plano horizontal de referência e a uma distância h dele, é dada pela expressão mgh, onde g é a aceleração da gravidade. Sabe-se ainda, que a energia potencial de um sistema formado por várias partículas é a soma das energias de cada uma. Assim, tomando-se o exemplo da barra com suas duas massas, podemos escrever:

$$(m_1 + m_2)gy = m_1\, gy_1 + m_2\, gy_2$$

ou seja,

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Observe que a altura do centro de gravidade do sistema formado pelas duas massas é a média das alturas, ponderada pelas massas. Em um sistema formado por diversas massas pon-

tuais, podemos aplicar a mesma idéia desse exemplo para determinar a posição do centro de gravidade, calculando essa média ponderada em relação a duas retas não paralelas. Em particular, se considerarmos um sistema de coordenadas e um conjunto de partículas de massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, respectivamente, o centro de gravidade desse conjunto será o ponto (x, y) onde:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \quad \text{e}$$
$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

12.4 Centro de Gravidade de uma Poligonal

Consideremos uma linha poligonal formada por segmentos consecutivos $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, de comprimentos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, respectivamente. Para justificar a definição que daremos, vamos imaginar que os lados dessa poligonal sejam varetas feitas do mesmo material e com mesma seção reta (seção perpendicular a cada vareta). Desta forma, a massa de cada vareta é proporcional ao seu comprimento, ou seja, $m_k = c \cdot a_k$, para $1 \leqslant k \leqslant n$. Como o centro de gravidade de cada vareta é o seu ponto médio, as noções que mostramos no exemplo anterior permitem aceitar a seguinte definição:

Definição. Se uma poligonal P é formada por segmentos consecutivos $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, de comprimentos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o ponto médio do segmento ℓ_k, o *centro de gravidade* de P é o ponto $G = (x, y)$ onde:

$$x = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \quad \text{e}$$
$$y = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Para fixar as idéias, vamos mostrar um exemplo onde calcularemos a posição do centro de gravidade do bordo de um triângulo.

Exemplo. Determinar a posição do centro de gravidade do bordo de um triângulo cujos lados medem 30cm, 30cm e 36cm.

Solução. Seja ABC o triângulo em questão com $AB = AC = 30$ e $BC = 36$. Vamos apoiá-lo em uma reta X que contém BC.

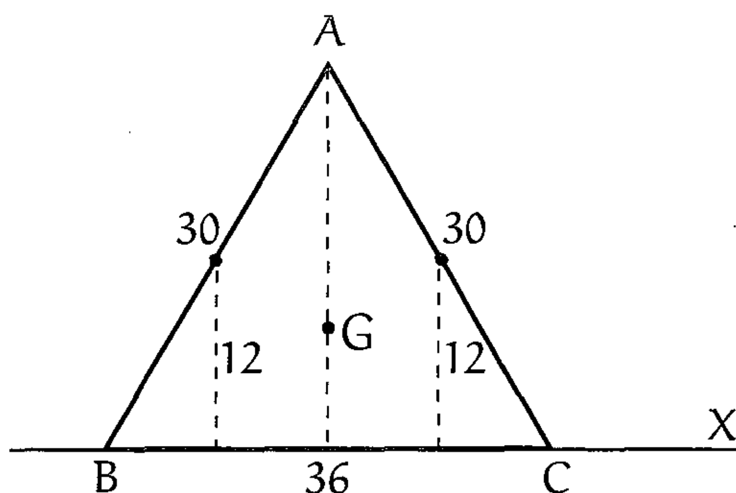


Figura 12.8

Como o triângulo é isósceles então o centro de gravidade procurado está em seu eixo de simetria, ou seja, ele pertence à altura relativa ao lado BC. Logo, para determinar sua posição, basta determinar a que distância ele está da reta X. A altura relativa a BC divide o triângulo dado em dois triângulos retângulos com hipotenusa igual a 30 e um cateto igual a 18. Pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que distância de A à reta X mede 24 e, conseqüentemente, as distâncias dos pontos médios de AB e AC à reta X valem 12. De acordo com nossa definição, a distância do centro de gravidade desse triângulo ABC à reta X é:

$$y = \frac{30 \cdot 12 + 30 \cdot 12 + 36 \cdot 0}{30 + 30 + 36} = 7{,}5.$$

Todos sabemos que a distância do baricentro de um triângulo a um lado é igual a um terço da altura relativa a esse lado. Logo, a distância do baricentro de ABC à reta X é igual a $24/3 = 8$. Entretanto nossos cálculos mostraram que essa distância é 7,5. Onde está o erro?

Na realidade, não há erro nenhum. Neste exemplo, o triângulo é apenas a reunião dos três lados, ou seja, aqui a palavra triângulo refere-se a uma linha poligonal fechada formada por três segmentos e o centro de gravidade dessa figura está mesmo a 7,5 cm de distância do lado BC. O que ocorre é que o baricentro do triângulo que conhecemos, interseção de suas medianas, é o centro de gravidade de sua *superfície*.

12.5 Área Lateral de um Tronco de Cone

Consideremos em um plano uma reta E e um segmento AB como mostra a figura abaixo.

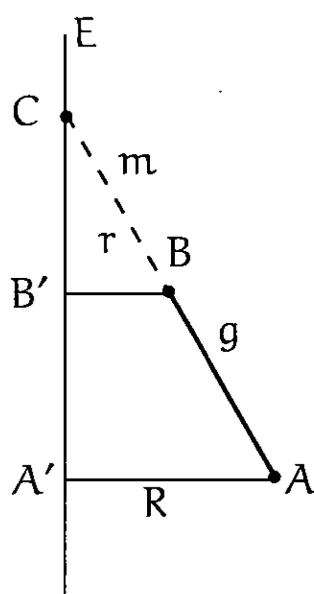


Figura 12.9

O segmento AB quando gira em torno do eixo E forma a superfície lateral de um *tronco de cone*. Observando a figura 6.9, se C é o ponto de interseção da reta AB com E, o tronco de cone é a diferença entre o cone de raio AA' e altura CA' e o cone de raio BB' e altura CB'. Vamos então determinar a área lateral desse tronco de cone pela diferença das áreas laterais dos dois cones.

Sejam R e r as distâncias de A e B ao eixo E, respectivamente. Seja $AB = g$, a geratriz do tronco de cone e seja $BC = m$, a geratriz do cone menor. Como os triângulos CBB' e CAA' são semelhantes,

temos:

$$\frac{R}{m+g} = \frac{r}{m} = \frac{R-r}{g}$$

ou seja, $(R-r)m = rg$. Do capítulo anterior, sabemos que a área lateral de um cone é igual a πRg onde R é o raio de sua base e g é sua geratriz. Logo, a área lateral do tronco de cone é:

$$\begin{aligned} A &= \pi R(m+g) - \pi rm \\ &= \pi Rm + \pi Rg - \pi rm \\ &= \pi Rg + \pi(R-r)m \\ &= \pi Rg + \pi rg \\ &= \pi(R+r)g \end{aligned}$$

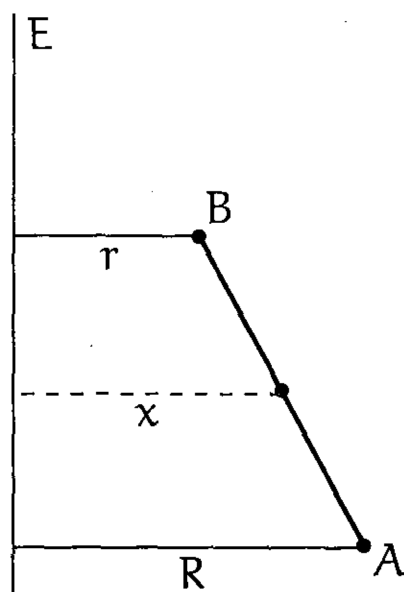


Figura 12.10

Finalmente, sendo x a distância do ponto médio de AB ao eixo E então $x = \frac{R+r}{2}$ e portanto a área lateral do tronco de cone toma a forma:

$$A = 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)g$$

ou seja,

$$A = 2\pi xg.$$

1º Teorema de Pappus. *Se uma linha plana gira em torno de um eixo de seu plano, a área da superfície gerada é igual ao comprimento dessa linha multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Em outras palavras, se uma linha plana tem comprimento L e se x é a distância do baricentro dessa linha a um eixo E, o 1º Teorema de Pappus afirma que a área da superfície de revolução que gerada pela rotação da linha em torno de E vale $2\pi x L$. Ainda, estamos usando aqui a palavra *baricentro* significando o centro de gravidade.

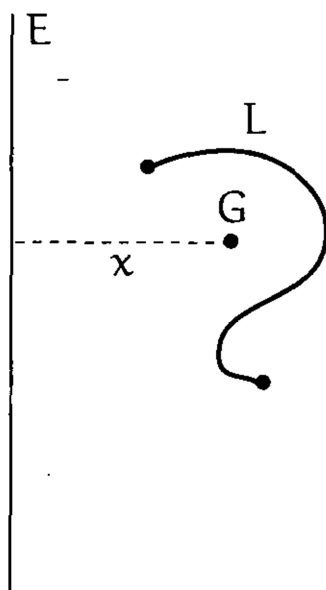


Figura 12.11

Vamos fazer a demonstração para uma linha poligonal.

Consideremos então como na figura a seguir, uma poligonal plana cujos lados têm comprimentos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e cujos pontos médios distam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de E, respectivamente. Seja ainda $L = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

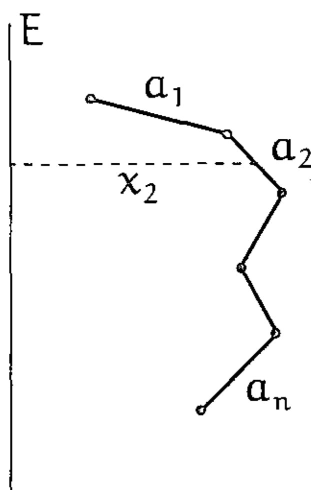


Figura 12.12

A rotação de cada segmento em torno de E, gera a superfície lateral de um tronco de cone e portanto, a área da superfície de revolução gerada pela poligonal é a soma das áreas de todos os troncos. Temos então para a área da superfície gerada pela poligonal:

$$A = 2\pi x_1 a_1 + 2\pi x_2 a_2 + \cdots + 2\pi x_n a_n$$
$$A = 2\pi(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n)$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da poligonal ao eixo E então:

$$x = \frac{x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

ou seja,

$$xL = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n .$$

Portanto, a área da superfície de revolução gerada pela rotação da poligonal em torno do eixo é:

$$A = 2\pi x L.$$

Nota. A demonstração do caso geral não será feita aqui pois envolve elementos de Cálculo. Entretanto, a maior parte do caminho foi mostrada. O passo final consiste em definir o comprimento de

uma curva pelo limite do comprimento de poligonais cujos vértices estão sobre a curva e tais que a distância entre dois consecutivos se torna arbitrariamente pequena. Mas, cremos que os resultados alcançados nesse texto, sejam suficientes para as aplicações na escola secundária e o leitor interessado poderá encontrar a demonstração completa nos livros de Cálculo.

12.6 Centro de Gravidade de um Polígono

Vamos agora considerar polígonos como a região do plano limitada por uma linha poligonal fechada. Estaremos a seguir, nos preparando para determinar a posição do centro de gravidade da superfície das figuras planas.

Em primeiro lugar, vamos entender porque o ponto de interseção das medianas de um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície.

Imagine um triângulo ABC recortado de uma chapa de madeira e pendurado pelo vértice A. Porque a reta vertical que passa por A, passa também no ponto médio de BC?

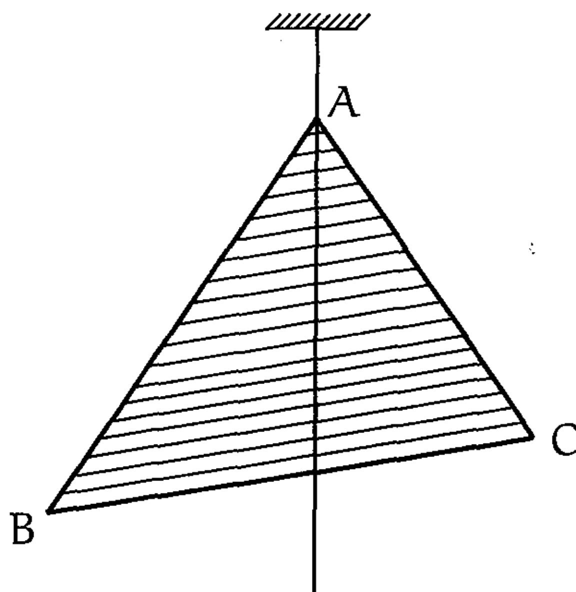


Figura 12.13

Para responder, imagine o triângulo ABC cortado por retas paralelas a BC em fatias muito finas. Cada fatia é "quase" um

segmento e, portanto só fica equilibrada se pendurada pelo seu ponto médio. Logo, a reta vertical que contém A passa pelos pontos médios de todas as fatias e, em particular, pelo ponto médio de BC. Ora, se o centro de gravidade da superfície de um triângulo pertence a uma mediana, então (repetindo-se a experiência) ele é o ponto de interseção das três medianas. Concluímos então que o ponto de interseção das medianas de um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície.

Para determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um polígono, vamos imaginá-lo, por exemplo, dividido em triângulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$, com áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectivamente (fig. 12.14). Consideremos um sistema de coordenadas no plano do polígono e seja (x_k, y_k) o baricentro do triângulo T_k. Apelando novamente para o raciocínio físico de considerar a figura recortada em uma chapa uniforme de espessura constante, temos que a massa de cada triângulo é proporcional à sua área, ou seja, a massa m_k do triângulo T_k é igual a $c \cdot A_k$ para uma certa constante c (que depende do material). Podemos então imaginar o polígono transformado em um conjunto de partículas, cada uma delas no baricentro de um triângulo e com massa proporcional à sua área. Em outras palavras, estamos imaginando que toda a massa de um triângulo esteja concentrada no seu baricentro.

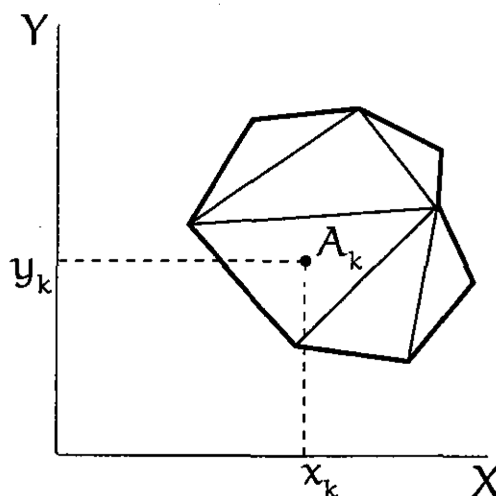


Figura 12.14

Essas considerações permitem aceitar a definição seguinte.

Definição. Se um polígono P está dividido em figuras

$$T_1, T_2, \ldots, T_n,$$

de áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectivamente, e sendo (x_k, y_k) o baricentro da figura T_k, o centro de gravidade da superfície de P é o ponto $G = (x, y)$, tal que:

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} \quad \text{e}$$

$$y = \frac{A_1y_1 + A_2y_2 + \cdots + A_ny_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}.$$

Para fixar essa idéia, vamos, no exemplo a seguir, determinar a posição do centro de gravidade da superfície de um trapézio.

Exemplo. Determine a posição do centro de gravidade da superfície do trapézio ABCD onde $A = D = 90°$, $AB = 10$, $CD = 4$ e $AD = 6$.

Solução. Consideremos em um sistema de coordenadas,

$$A = (0,0), \; B = (10,0), \; C = (4,6) \quad \text{e} \quad D = (0,6),$$

como na figura a seguir.

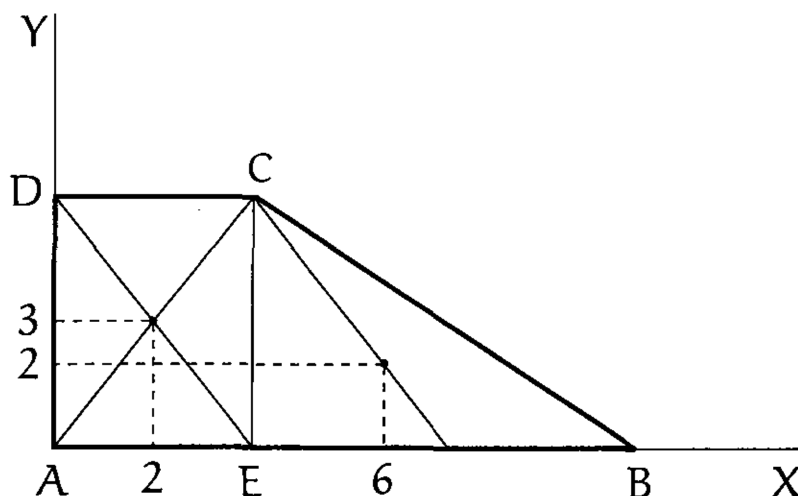


Figura 12.15

Dividamos o trapézio em duas figuras: um retângulo ADCE e um triângulo retângulo CEB. As áreas dessas figuras são $A_1 = 24$ e $A_2 = 18$, respectivamente. O baricentro do retângulo é o ponto (2,3) e o baricentro do triângulo é o ponto (6,2).

Se $G = (x, y)$ é o centro de gravidade da superfície de ABCD, temos:

$$x = \frac{24 \cdot 2 + 18 \cdot 6}{24 + 18} = \frac{26}{7} \quad \text{e}$$

$$y = \frac{24 \cdot 3 + 18 \cdot 2}{24 + 18} = \frac{18}{7}$$

12.7 A Rotação de um Retângulo

Observemos agora o que acontece quando giramos um retângulo em torno de um eixo de seu plano e paralelo a um dos lados.

A figura a seguir mostra um retângulo de base a e altura b, e um eixo E, paralelo a um lado do retângulo e distando d do lado mais próximo. Seja ainda, $S = ab$, a sua área.

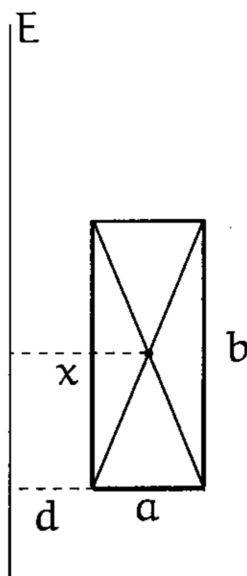


Figura 12.16

A rotação desse retângulo em torno de E produz um sólido de revolução que é a diferença entre dois cilindros: o maior, com raio $a + d$ e altura b, e o menor com raio d e altura b. O volume desse

sólido é, portanto,

$$\begin{aligned} V &= \pi(a+d)^2 d - \pi d^2 b \\ &= \pi a^2 b + 2\pi a d b \\ &= \pi a b (a + 2d) \\ &= 2\pi\left(\frac{a}{2} + d\right) S \end{aligned}$$

Observe que $x = \frac{a}{2} + d$ é a distância do centro desse retângulo ao eixo. Concluímos então que se um retângulo de área S gira em torno de um eixo paralelo a um de seus lados e que não o atravessa, o volume gerado é

$$V = 2\pi x S$$

onde x é a distância do centro do retângulo ao eixo.

2º Teorema de Pappus. *Se uma figura plana gira em torno de um eixo de seu plano, o volume gerado é igual à área dessa figura multiplicado pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu baricentro.*

Em outras palavras, se uma figura plana tem área S e se x é a distância do baricentro dessa figura a um eixo E, o 2º Teorema de Pappus afirma que o volume do sólido de revolução gerado pela rotação dessa figura em torno de E vale $2\pi x S$.

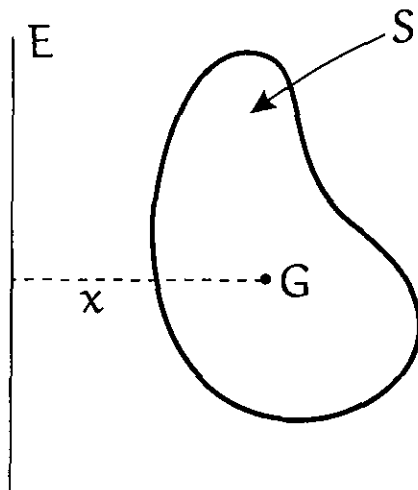


Figura 12.17

Vamos mostrar uma demonstração no caso em que a figura é um polígono retangular, ou seja, um polígono que é a reunião de vários retângulos justapostos, e o eixo é paralelo a um lado desses retângulos.

Consideremos então o polígono retangular P, dividido em retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$, de áreas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectivamente. Seja $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ a área de P e seja x_k a distância do centro do retângulo R_k ao eixo E, que é paralelo a um lado desses retângulos e não atravessa nenhum deles.

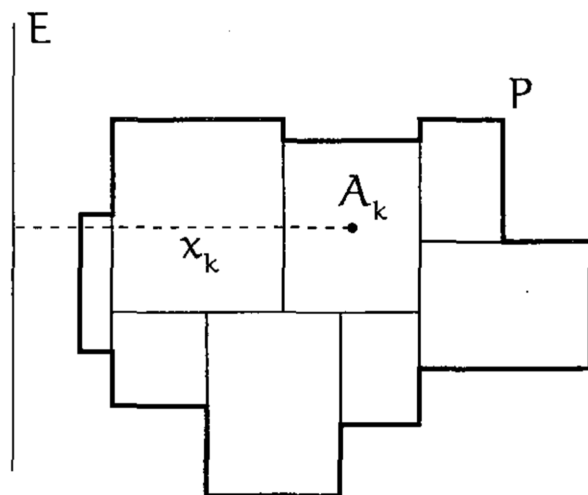


Figura 12.18

O volume do sólido gerado pela rotação de P em torno de E é a soma dos volumes gerados pela rotação de cada um dos retângulos. A partir do que concluímos no item anterior, teremos para esse volume a expressão:

$$V = 2\pi x_1 A_1 + 2\pi x_2 A_2 + \cdots + 2\pi x_n A_n$$
$$V = 2\pi (x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n).$$

Entretanto, se x é a distância do centro de gravidade da superfície do polígono P ao eixo E então:

$$x = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}$$

ou seja,

$$xS = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n.$$

Portanto, o volume do sólido de revolução gerado pela rotação do polígono retangular P em torno do eixo é:

$$V = 2\pi x S.$$

Nota. A demonstração se completa com um passo a mais. Definimos a área de uma figura plana F como o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F. Desta forma, o volume do sólido gerado pela rotação de F em torno de um eixo é o número real cujas aproximações por falta são os volumes gerados pelos polígonos retangulares contidos em F.

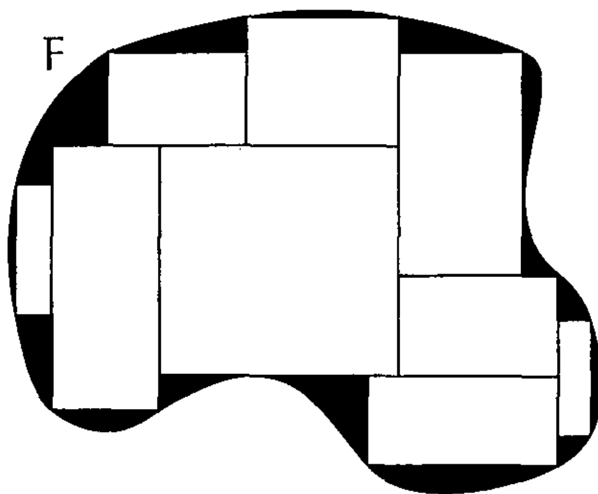


Figura 12.19

Exemplos.

1) *O volume do cone*

Podemos calcular facilmente o volume de um cone de revolução como aplicação do Teorema de Pappus.

Um cone de revolução é obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um dos catetos. A figura abaixo, mostra um triângulo retângulo ABC com catetos $AB = R$ e $AC = h$ e o eixo E que contém AC.

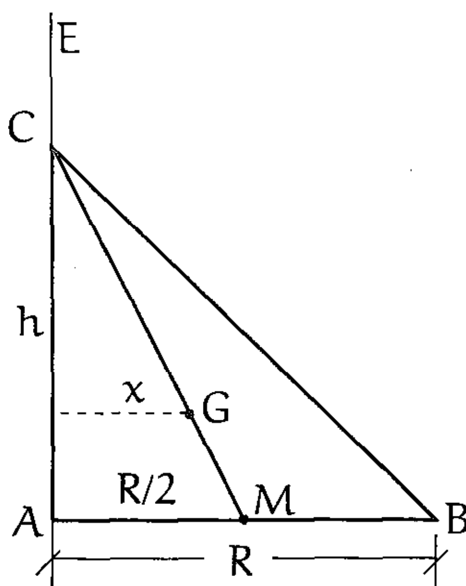


Figura 12.20

O baricentro de ABC é o ponto G, situado sobre a mediana AM e tal que

$$CG = \frac{2}{3}CM.$$

Se x é a distância de G ao eixo, então

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R}{3}.$$

Como a área de ABC é

$$S = \frac{Rh}{2},$$

o volume do sólido de revolução gerado pela rotação de ABC em torno de E, será igual a:

$$V = 2\pi x S = 2\pi \frac{R}{3} \cdot \frac{Rh}{2} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

ou seja, a terça parte do produto da área da base pela altura.

2) *A área e o volume do toro*

Um *toro* é o sólido gerado pela rotação de um círculo em torno de um eixo de seu plano.

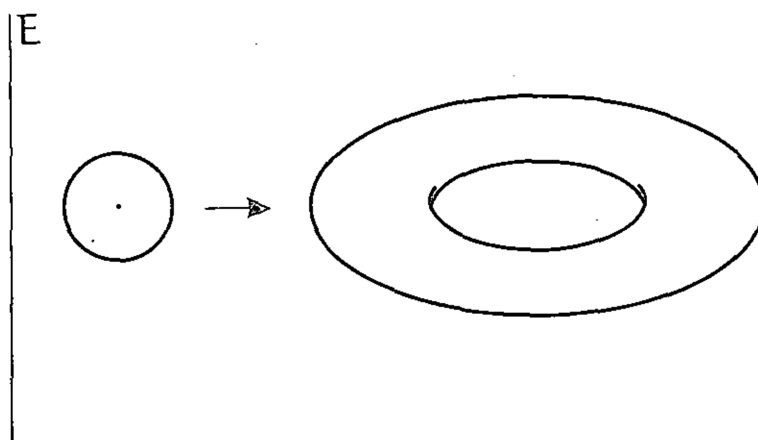


Figura 12.21

Uma câmara de ar de automóvel é um toro. Com os teoremas de Pappus, podemos calcular facilmente a área de borracha dessa câmara e o volume de ar que existe dentro dela (veja exercício 4 deste capítulo).

12.8 O Volume e a Área da Esfera

Para calcular a área e o volume da esfera como aplicação dos Teoremas de Pappus, precisamos de um resultado preliminar.

A figura abaixo, mostra uma reta E e um segmento AB no mesmo plano.

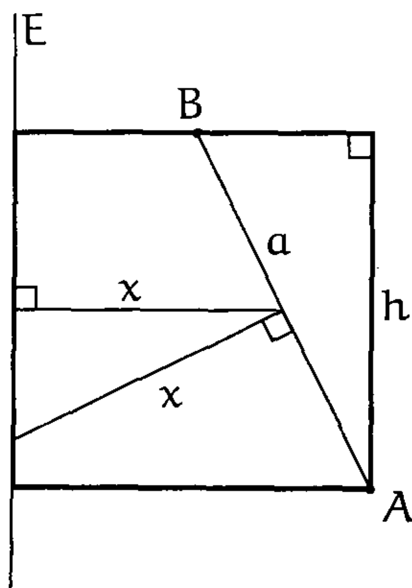


Figura 12.22

Seja $AB = a$, seja x a distância do ponto médio de AB à reta E, seja h o comprimento da projeção de AB sobre E e, finalmente, seja z o comprimento do segmento da mediatriz de AB compreendido entre AB e E. Esse segmento será chamado de *apótema* de AB. Por uma elementar semelhança de triângulos, temos

$$\frac{h}{a} = \frac{x}{z}, \quad \text{ou seja,} \quad ax = zh.$$

Esta simples relação nos permitirá obter facilmente a área da esfera como aplicação do 1º Teorema de Pappus.

12.9 A Área da Esfera

A superfície da esfera pode ser obtida através da rotação de uma semi-circunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro. Consideremos então uma semi-circunferência de raio R e um eixo E que contém seu diâmetro AB. Dividimos a semi-circunferência em n partes iguais para formar uma linha poligonal regular inscrita nela.

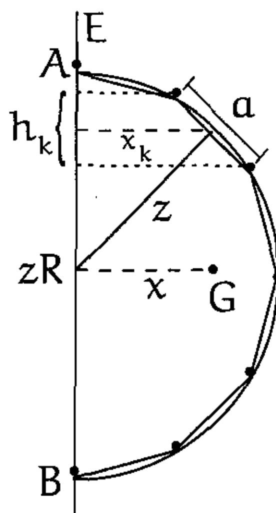


Figura 12.23

Os lados $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, dessa poligonal têm comprimento a e seja h_k o comprimento da projeção do lado ℓ_k sobre E. Como a poligonal é regular, todos os lados têm mesmo apótema z.

Calculemos então a distância x do centro de gravidade dessa

poligonal ao eixo. Sendo x_k a distância do ponto médio de ℓ_k ao eixo e levando em conta a relação $ax = zh$ que demonstramos anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n}{a + a + \cdots + a} \\ &= \frac{zh_1 + zh_2 + \cdots + zh_n}{na} \\ &= \frac{z}{na} 2R. \end{aligned}$$

Quando o número de lados da poligonal aumenta, então na tende para o comprimento da semi-circunferência (πR) e o apótema z, tende para R. Concluímos então que a distância do centro de gravidade de uma semi-circunferência ao seu diâmetro é:

$$x = \frac{R}{\pi R} 2R = \frac{2R}{\pi}.$$

Pelo 1º Teorema de Pappus, quando a semi-circunferência gira em torno de seu diâmetro, a área da superfície gerada é:

$$A = 2\pi x L = 2\pi \frac{2R}{\pi} \pi R = 4\pi R^2.$$

12.10 O Volume da Esfera

Para encontrar o volume da esfera como aplicação de Teorema de Pappus, consideremos, como no caso anterior, uma semi-circunferência de raio R e diâmetro AB, e uma reta E que contém esse diâmetro. Dividimos a semi-circunferência em n partes iguais formando a poligonal regular inscrita, e unimos todos os vértices ao centro O.

Temos então um polígono P, inscrito no semi-círculo e dividido em triângulos isósceles $T_1, T_2, \ldots, T_n$, todos iguais, com base a e altura z. Cada um desses triângulos têm área

$$A = \frac{az}{2}$$

e a distância do baricentro do triângulo T_k ao eixo E é

$$\frac{2}{3}x_k,$$

onde x_k é, como no item anterior, a distância do ponto médio de sua base ao eixo. Vamos então determinar a distância x do baricentro desse polígono ao eixo E.

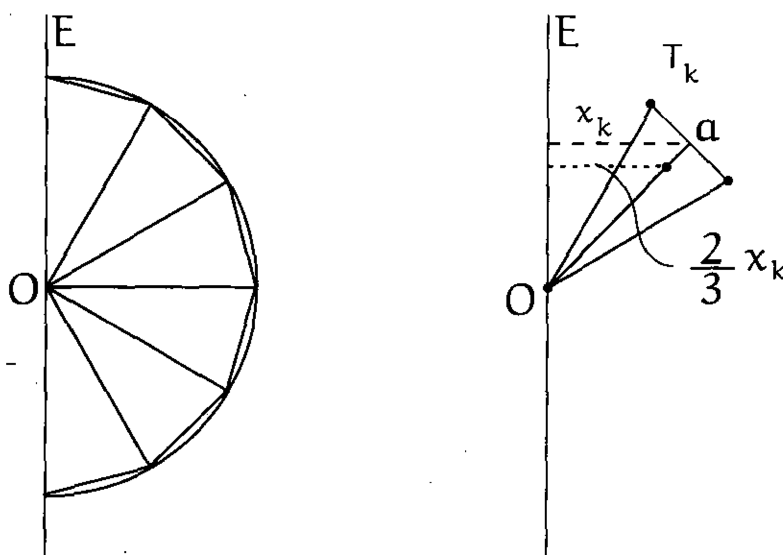


Figura 12.24

$$\begin{aligned} x &= \frac{A\frac{2}{3}x_1 + \cdots + A\frac{2}{3}x_n}{A + \cdots + A} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{az}{2}x_1 + \cdots + \frac{az}{2}x_n\right)}{A + \cdots + A} \\ &= \frac{\frac{z}{3}(ax_1 + \cdots + ax_n)}{nA} = \frac{\frac{z}{3}(zh_1 + \cdots + zh_n)}{nA} \\ &= \frac{\frac{z^2}{3}(h_1 + \cdots + h_n)}{nA} = \frac{z^2}{3}\frac{2R}{nA}. \end{aligned}$$

Quando n cresce, nA que é a área do polígono P, tende para $\pi R^2/2$, a área do semi-círculo, e o apótema z tende a R. Temos então que a distância do centro de gravidade de um semi-círculo ao eixo é:

$$x = \frac{R^2}{3}\frac{2R}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Pelo 2º Teorema de Pappus, o volume da esfera é:

$$V = 2\pi x S = 2\pi \frac{4R}{3\pi} \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Nota. A maior parte do material deste capítulo pode ser excessiva para a prática em sala de aula nas escolas do segundo grau. Entretanto, as noções intuitivas de centro de gravidade de figuras planas são importantes e úteis, e os teoremas de Pappus podem ser apresentados sem uma demonstração formal. O professor pode, por exemplo mostrar um pedaço de uma mangueira de borracha que, estendida, é um cilindro. Nessa situação, a área lateral e o volume dessa mangueira podem ser calculados facilmente. Se, em seguida as extremidades da mangueira são unidas para formar um toro, os alunos podem compreender que agora a altura do cilindro tomou a forma de uma circunferência. É claro que nessa operação, a parte interna do toro ficou um pouco comprimida e a parte externa um pouco dilatada, mas é bastante razoável aceitar que a altura da mangueira tenha se transformado no comprimento da circunferência que contém os centros das bases.

Exercícios

1. Calcule a área e a superfície do sólido de revolução gerado pela rotação de um triângulo equilátero de lado 1 em torno de um eixo (de seu plano) que contém um vértice e é perpendicular a um lado.

2. Calcule a área e o volume de um toro sabendo que as circunferências interna e externa têm diâmetros 10cm e 16cm.

3. Um triângulo retângulo de catetos b e c gira em torno de um eixo de seu plano que contém o vértice do ângulo reto. Determine o maior volume que pode ser gerado.

4. Considere em um sistema de coordenadas e o polígono convexo P cujos vértices são (0,0), (0,6), (8,6), (8,4), (12,4) e (12,0). Determine as coordenadas do centro de gravidade:

a) do *bordo* de P,
b) da *superfície* de P.

5. Um plano secante a uma esfera divide sua superfície em duas regiões chamadas *calotas*. Mostre que a área de uma calota esférica é dada por $2\pi Rh$ onde R é o raio da esfera e h é a altura da calota.

6. Um astronauta em sua nave espacial consegue observar em certo momento exatamente 1/6 da superfície da Terra. Determine a que distância ele está da superfície do nosso planeta.

Considere o raio da Terra igual a 6400km.

7. Encontre uma construção com régua e compasso para o centro de gravidade da superfície de um trapézio.

Respostas dos Exercícios

Respostas dos Exercícios do Capítulo 1

1.1 Progressões Aritméticas

1) $2n+1$ 2) 108º 3) $x=-7$; $a_5=-2$ 4) 1.666 5) 5.373. 6a) 108 6b) 32.400 7) $a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 8) 65 9) 5; 2 10) $\frac{n(n^2+1)}{2}$ 11) 800 12) Não 13) $n=31$; o número suprimido é igual a 13 14) $R\$3.500,00$ 15) $R\$3.500,00$ 16) 396 17) 7^{164} 18) 249 19a) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 19b) $\frac{n(4n^2+5n-1)}{2}$ 20a) $\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ 20b) $\frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}$ 20c) 62,25 20d) 21.088 22a) $a_1=3$; $r=4$ 22b) Não existe tal progressão 23a) 931 23b) 29.791 24) O primeiro jogador tem a estratégia ganhadora: começar dizendo 7 e, a partir daí, escolher sempre o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário 25) O segundo jogador ganha escolhendo sempre o complemento para 8 do número escolhido pelo adversário 26) O segundo jogador ganha escolhendo sempre o complemento para 9 do número escolhido pelo adversário 27) Recebendo o jogo em 51, 59, 60, 61 ou 62, jogue 3. Recebendo em 50, 57 ou 58, jogue 5. Recebendo em 52, 54, 55 ou 56, jogue 7. Recebendo em 49 ou 53, jogue 6. Recebendo abaixo de 49, jogue de qualquer jeito 28) 276 29) Aproximadamente 236m 30a) $2k^2-3k+2$ 30b) $2k^2-2k+1$ 30c) $4k^3-6k^2+4k-1$ 30d) k^4 31) $\frac{n^2+n+2}{2}$ 34) 10 35a) 98 35b) Sexta-feira 35c) 2003 35d) 0,2425 36a) 2004 36b) 14 37) $\frac{4n+1}{8n-5}$ 38) $\frac{n[(j-2)n-j+4]}{2}$ 40) $a^k(a-1)$ 41) $\frac{a^k}{a-1}+C$, sendo uma constante arbitrária 41a) $\frac{3^{n+1}-3}{2}$ 41b) $(n+1)!-1$ 41c) $\frac{n}{n+1}$.

1.2 Progressões Geométricas

1) 32% 2) 28% 3) 12% 4) 37,5% 5) Aproximadamente 46% 6) 44% 7) 25% 8) - 1% 9) 18.000 $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, ou seja, R\$ 16.264,84 10) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ 11) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 12) 1 13) 4,6,9 ou 9,6,4 14) 4,6,9 ou 9,6,4 15) -8, -2, 4, -8 17) $\frac{10^{n+1}-10-9n}{81}$ 18) $\frac{2.10^n+1}{3}=66...67$ (n dígitos) 19) D 20) $p\left(1-\frac{1}{p}\right)^n$ 21a) 48.360 21b) 3.224 22a) $\frac{14}{99}$ 22b) $\frac{19}{55}$ 22c) 1 22d) $\frac{77}{45}$ 23a) 3 23b) $\frac{3}{16}$ 23c) 3 23d) $(1-x)^{-2}$ 23e) $\frac{2}{7}$ 24a) 13m

24b) 5s, aproximadamente 25a) $\frac{a^2}{a-b}$ 25b) $a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$ 26a) 2π 26b) $\frac{4}{3}$ 27) $\frac{1-r^n}{1-r}$ 28) 396 e 319, aproximadamente 29) 1 e 5 30) $\frac{1}{7}$ 31a) x 31b) $\sqrt[3]{x^2y}$ 32a) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 32b) 0 32c) Não, o conjunto é infinito 35) 936 anos,aproximadamente 36) $\frac{10^n+2}{3} = 333...34$ (n dígitos) 37) $\begin{bmatrix} 5^{n-1} & 2.5^{n-1} \\ 2.5^{n-1} & 4.5^{n-1} \end{bmatrix}$ 38a) $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$ 38b) $\frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(\frac{4}{9}\right)^n$ 38c) ∞ 38d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 39a) 523 Hz, aproximadamente 39b) 392 Hz, aproximadamente 39c) Fá # 40b) 3dB 41a) 6 41b) $(n-1)2^{n+1}+2$.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 2

Matemática Financeira

1) 10,06% 2) 5,95%; 11,60% 3) 101,22%; 57,35% 4a) 34,49% 4b) 33,55% 4c) $\left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1$ 5) $e^i - 1$ 6) O número e é o valor do montante gerado em um ano por um principal igual a 1, a juros de 100% ao ano, capitalizados continuamente. 7a) 12,75% 7b) 47,00% 7c) 23,50% 8) a 9) Sim 10) R$ 272,00 11a) R$ 352,93 11b) R$ 374,11 11c) R$ 396,56 12a) 4,59% 12b) R$ 626,30 13) $(0,3.1,1^t + 0,7.1,18^t)^{\frac{1}{t}} - 1$, onde t é o número de meses do investimento. Se $t = 1$, a taxa é 15,60%; se $t = 2$, é 15,66%; se $t \to \infty$, a taxa é 18% 14a) 51,08% 14b) 20,20% 14c) 12,81% 15) $x < 7,03\%$ 16a) 6,38% 16b) 6,60% 16c) 6,84% 17) 7,72% 18b) R$5,33; R$5,26 18c) R$5,05; R$4,98 19) R$30,80 20) melhor: a; pior: c 21) 14,33% 22a) R$456,26 22b) R$471,39 22c) R$472,23 23a) R$51,27 23b) R$54,35 23c) R$57,61 24a) R$300,00 24b) R$283,02 25) R$16,60 26) R$ 14,04 27)

TABELA PRICE

Época	Prestação	Juros	Amortização	Estado da dívida
0	-	-	-	3 .000,00
1	562,33	300,00	262,33	2. 737,67
2	562,33	273,77	288,56	2. 449,11
3	562,33	244,91	317,42	2. 131,69
4	562,33	213,17	349,16	1. 782,53
5	562,33	178,25	384,08	1. 398,45
6	562,33	139,84	422,49	975,96
7	562,33	97,60	464,73	511,23
8	562,35	51,12	511,23	-

S A C

Época	Prestação	Juros	Amortização	Estado da dívida
0	-	-	-	3. 000,00
1	675,00	300,00	375,00	2. 625,00
2	637,50	262,50	375,00	2. 250,00
3	600,00	225,00	375,00	1. 875,00
4	562,50	187,50	375,00	1. 500,00
5	525,00	150,00	375,00	1. 125,00
6	487,50	112,50	375,00	750,00
7	450,00	75,00	375,00	375,00
8	412,50	37,50	375,00	-

28a) R$ 420,06 28b) R$ 23.056,28 29a) R$ 351,94 29b) R$ 15.555,56 30a) 18% 30b) 32% 31a) 20% 31b) 50% 32) A original 33) Comprar 34) 25%

Respostas dos Exercícios do Capítulo 3

3.1 Seqüências Definidas Recursivamente

1) 41 2) $x_{n+1} = x_n + n + 1$, $x_0 = 1$ 5) $x_n = 3.2^{n-1}$ 6) $x_n = 3n - 1$ 7) $x_{n+1} = x_n + 2n$, $x_1 = 2$ 8) $D_5 = 44$

3.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

1) $x_n = \frac{n^2+n}{2} + 1$ 2) $x_n = 2^{n-1}$ 3) $x_n = \frac{3^n-1}{2}$ 4) $x_n = 2^n - 1$ 5) $x_n = 0,5$ $(1-0,2^n)$ 6) $x_n = n^2-n+2$ 7) $x_n = 2.n!-1$ 8) $x_n = \frac{n-2+2(-1)^{n-1}}{n}$ 9) $x_n = \frac{(n+1)!}{2}$ 10) $x_n = (k-1)^n+(-1)^n\cdot(k-1)$ 11) $p_n = \frac{R}{i-j}+(1+i-j)^n\left(p_0 - \frac{R}{i-j}\right)$; não, se $p_0 \geq \frac{R}{i-j}$ e sim, caso contrário.

3.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

1a) $x_n = C_1(-2)^n+C_2(-3)^n$ 1b) $x_n = C_1 3^n+C_2 n 3^n$ 1c) $x_n = \sqrt{2^n}\left[C_1 \cos\frac{3n\pi}{4}+ C_2 \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}\right]$ 1d) $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4}$ 1e) $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}4^n$ 1f) $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n - n2^{n-1}$ 1g) $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4} + n3^{n-1}$ 1h) $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n + \frac{n}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{18}n^2 3^n$ 1i) $x_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{2} + C_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2}$ 1j) $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n + \frac{1}{4} + \frac{n^3-3n^2}{54}3^n$ 2a) $x_n = 3(-2)^n$ 2b) $x_n = 2^n + 2n$ 2c) $x_n = (n^2 - n + 3)2^n$ 3) $x_n = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n + \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$ 4) F_n 5) F_{n-1} 6) $x_n = \frac{(-1)^n+11\cdot(23)^2}{12}$ 7) $\left(a+\frac{pb}{i}\right)\left(1+\frac{i}{p}\right)^n - \frac{pb}{i}$ 8) $x_n = \frac{5(2+\sqrt{2})}{16}\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{5}\right)^n + \frac{5(2-\sqrt{2})}{16}\left(\frac{2-2\sqrt{2}}{5}\right)^n$ 9) F_n

Respostas dos Exercícios do Capítulo 4

4.1 Princípios Básicos de Combinatória

1) 5^{10} 2) 2^n 3) 60 4) 460.800 5) 3.612 e 1.806 6) $8! = 40.320$ e $(40.320)^2$ 7) 612 8) 2.401 e 840 9) 15 e 8 10) Os de números $1^2, 2^2, 3^2, ..., 30^2$ 11) 260 12) 1.658.775 e 1.214.400 13) 175.760.000 14) 43.200 15) 642 16) 3.168 17) 209 18) 48 19) Não existe essa história de primeira pessoa do casal. Se você cria uma distinção artificial entre as pessoas do casal - a primeira pessoa e a segunda pessoa -, você vai contar cada casal mais de uma vez. Por exemplo, o casal João e Maria foi contado duas vezes: uma, quando João é a primeira pessoa e Maria é a segunda, e foi contado novamente quando Maria é a primeira pessoa e João é a segunda. Toda vez que se cria uma distinção artificial entre coisas iguais, isso resulta em uma contagem múltipla. Isso, aliás, não é ruim se percebe que foi feita uma contagem múltipla. No caso, cada casal foi contado duas vezes; para corrigir a contagem errada de 50, basta dividir por 2. A resposta correta é 25. 20) 98.475 21) 1.170

4.2 Permutações e Combinações

1a) $8! = 40.320$ 1b) $4 \times 3 \times 6! = 8.640$ 1c) $2 \times (4!)^2 = 1.152$ 1d) $6! = 720$ 1e) $3!6! = 4.320$ 1f) $6! = 720$ 1g) $2 \times 7! - 6! = 9.360$ 1h) $3 \times 7! - 3x6! + 5! = 13.080$ 1i) 6.720 2) n! 3) $8! - 2 \times 7! = 30.240$ 4) $2 \times 7! - 2 \times 2 \times 6! = 7.200$ 5) $3^8 \times 2 \times 1 = 13.122$ 6) $\frac{15!}{(5!)^3} = C_{15}^5 \cdot C_{10}^5 \cdot 1 = 756.756$ 7) 126.126 8) $\frac{C_{20}^3 \cdot C_{17}^3 \cdot C_{14}^3 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^4 \cdot 1}{4!2!} = \frac{20!}{(3!)^4 (4!)^2 4!2!} = 67.897.830.000$ 9) $\frac{12!}{6!2^6} = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10.395$ 10a) $81^{\underline{o}}$ 10b) 46.721 10c) 2 10d) 5.333.280 11) m!(r+1)! 12a) 720 12b) 30 12c) 2 13) Tetraedro: 2. Octaedro: $\frac{8!}{24} = 1.680$. Dodecaedro: $\frac{12!}{60} = 7.983.360$. Icosaedro: $\frac{20!}{60}$ 14) $n = 1$ e $n = 3$ 15) $\frac{9!}{2!2!} = 90.720$ 16) C_n^p 18) Uma comissão com 4 homens, A,B,C,D foi contada várias vezes; uma, quando A,B,C foram escolhidos inicialmente e D posteriormente; outra, quando A,B,D foram escolhidos inicialmente e C posteriormente, etc. Já uma comissão com apenas três homens só foi contada uma vez. 19a) 3 19b) 36 19c) 100 19d) 4 19e) 18 20) C_n^m 21) $C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 8^2 - C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 8 = 12.960$ 22a) $C_{n-1}^{p=-1}$ 22b) C_{n-1}^p 22c) $2C_{n-2}^{p-2}$ 22d) $2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} = C_n^p - C_{n-2}^p$ 22e) $2C_{n-2}^{p-1}$ 23a) $C_{32}^5 = 201.376$ 23b) $8C_4^2 C_7^3 4^3 = 107.520$ 23c) $C_8^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 6 \cdot 4 = 24.192$ 23d) $8C_4^3 C_7^2 4^2 = 10.752$ 23e) $8 \cdot 7 \cdot 4 = 224$ 23f) $8 \cdot C_4^3 \cdot 7 \cdot C_4^2 = 1.344$ 23g) $4(4^5 - 4) = 4.080$ 23h) $4 \cdot (C_8^5 - 4) = 208$ 23i) 16 23j) 4 24a) n!

24b) $\frac{(n+1)!n}{2}$ 24c) $\frac{(n+2)!n(3n+1)}{24}$ 25) $C_{20}^3 - C_8^3 + 1 = C_{12}^3 + 8 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_8^2 + 1 =$ 1.085 26) $2^3 \cdot C_7^4 \cdot 3! = 1.680$ 27) 25.200 28) C_{n-p+1}^p 29a) $C_{11}^4 = 330$ 29b) $C_{10}^4 = 210$ 30) $30 \times 7! = 151.200$ 31) 126 32) $\frac{(m+h)!}{m!h!}$ 33a) 28 33b) 7 34a) $\frac{tk}{a}$ 34b) $\frac{tk(k-1)}{a(a-1)}$ 35) 6 36) $4!.5! = 2.880$ 37) 72 38) 15 39) 84 40) 10.626 .

4.4 Binômio de Newton

1) 120 2a) 5 2b) 10 ou 11 3) 210 4) $2n^2 - 6n + 1$ 5) 4^n 6a) 3^n 6b) $\frac{3^n+1}{2}$ 7) $\frac{C_{100}^{33}}{2^{33}}$.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 5

5.1 Conceitos Básicos de Probabilidade

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{11}{23}$ 5a) $\frac{25}{54}$ 5b) $\frac{25}{108}$ 5c) $\frac{25}{162}$ 5d) $\frac{25}{1296}$ 5e) $\frac{1}{1296}$ 5f) $\frac{5}{162}$ 5g) $\frac{5}{648}$ 6) $\frac{n+1}{2(2n-1)}$ 7) $\frac{3}{11}$ 8) $\frac{41}{96}$ 9) $\frac{4}{7}$ 10) $\frac{5}{126}$ 11) $\frac{7}{18}$ 12a) $\frac{C_8^3 C_{72}^2}{C_{80}^5} \cong \frac{1}{168}$ 12b) $\frac{C_8^4 C_{72}^1}{C_{80}^5} \cong \frac{1}{4770}$ 12c) $\frac{C_8^5}{C_{80}^5} \frac{1}{429.286}$ 13) $\frac{2}{n-1}$ 14a) $\frac{1}{n}$ 14b) $\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$ 15a) $\frac{1}{55}$ 15b) $\frac{14}{55}$ 16a) 0,8 16b) 0,1 16c) 0,3 16d) 0,6 17a) 0,5 e 0,7 17b) 0,1 e 0,6 18a) 0,5 18b) 0,495 19a) $\frac{4}{45}$ 19b) $\frac{7}{9}$ 19c) $\frac{2}{15}$.

5.2 Probabilidade Condicional

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{2}{17}$ 3a) Sim 3b) Sim 3c) Sim 3d) Não 4a) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0,518$ 4b) $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0,491$ 5) Aproximadamente 0,08 6) 13 7a) $\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{k-2}$ 7b) $\frac{(n-1)!}{(n-k)!(n-1)^{k-1}}$ 8) $\frac{13}{41}$ 9) Em uma urna ponha apenas uma bola branca e ponha as outras bolas na outra urna 10a) $\frac{1}{2^{n-1}}$ 10b) $\frac{1}{2^k}$, se $k < n$; $\frac{1}{2^{n-1}}$, se $k = n$ 11a) $\frac{8}{15}$ 11b) $\frac{8}{65}$ 11c) 3; $\frac{4}{45.045}$ 12) Deve trocar. Trocando, a probabilidade de ganhar o prêmio é de $\frac{2}{3}$. Não trocando, é de apenas $\frac{1}{3}$ 13) $\frac{63}{256}$ 14a) $\frac{2}{5}$ 14b) $\frac{1}{3}$ 15) $\frac{1}{3}$ 16) Aproximadamente 31,5%. 17) Não. Se P(ABC) $= \frac{1}{4}$, P(ACB)$= \frac{1}{12}$, P(BAC) $= \frac{1}{12}$, P(BCA) $= \frac{1}{4}$, P(CBA) $= \frac{1}{12}$ e P(CAB) $= \frac{1}{4}$, teríamos as hipóteses satisfeitas. 18) $\frac{1}{3}$ 19) $\frac{1}{2}$ 20) $\frac{11}{36}$.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 6

6.1 Médias

1) É a média harmônica de v_1 e v_2 2) É a média aritmética de v_1 e v_2 3) C 4) 2,8%, aproximadamente 5) Aproximadamente -12,1% e -3,2%. 6) 7 horas 7) 8h30min 11) Não. Para a classificação estar correta, basta que o peso de Português seja maior do que o triplo do peso de Matemática 12a) 48.000 km. Trocando os dianteiros com os traseiros aos 24.000 km. 12b) 60.000 km. Permutando circularmente os 5 pneus a cada 12.000 km, por exemplo; ou, por exemplo, mantendo os pneus traseiros e rodando 20.000 km com os pneus 1 e 2 na frente, outros 20.000 km com os pneus 1 e 3 na frente e 20.000 km com os pneus 2 e 3 na frente 12c) Harmônica 13) 37,5 14) A soma dos quadrados 17) Grandes erros por excesso seriam compensados por grandes erros por falta e poderíamos ter aproximações ruins com média aritmética de erros próxima de zero 18) É a média aritmética $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 19) Se n é ímpar, $n = 2k + 1$, a resposta é x_{k+1}. Se n é par, $n = 2k$, a resposta é qualquer valor compreendido entre x_k e x_{k+1}, inclusive. 20b) 380 e 680; a de Augusto 20c) $y = 181x + 822$ 25) 73 28) 65 29) 5 34a) Sim 34c) Em $(-\infty, x_1)$ 34d) Em (x_2, ∞) 35a) Não 36) 1,73m .

6.3 Desigualdade das Médias Generalizada

9) 45, sendo 23 paletós e 22 calças ou vice-versa. Ou 24 e 21 ou 25 e 20 11b) 4 15) $(0,1]$ e $[\sqrt{3},\infty)$ 16) $(0,1]$ e $(0,\infty)$ 17) $(0,\infty)$ e $(\sqrt{3},\infty)$ 18) $(0,1]$ e $(0,3]$ 19) $[3,\infty)$ e $[3,\infty)$ 20) $[12,\infty)$ e $[6,\infty)$.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 7

1) Supondo que, neste trecho, tanto a ponte quanto a via férrea estejam em planos horizontais (sem rampa), temos as seguintes relações: α e β são paralelos; r está contida em α e é paralela a β, enquanto s está contida em β e é paralela a α; r e s são reversas. É possível também que os planos das duas estradas não sejam paralelos (por exemplo, se a estrada estiver no plano horizontal mas a ferrovia estiver em um trecho de rampa). Neste caso, temos as seguintes relações: α e β são secantes;

r está contida em α e é secante a β, enquanto s está contida em β e é secante a α; r e s são reversas 2) 4 planos 3) 20 planos 4) O retângulo ABGH 5) A reta determinada por O e P 6) A reta determinada por A e B 7) AC e BD são reversas 8) a) basta tomar o plano definido por r e por uma paralela a s traçada por um ponto qualquer de r b) repetir a construção para a reta s: os dois planos assim determinados são paralelos e contém, respectivamente, r e s c) P e r determinam um plano α; toma-se o ponto A de interseção de s e α e, a seguir, determina-se o ponto B em que a reta AP intersecta r. A reta AB é a reta pedida (observação: P não pode estar em nenhum dos dois planos obtidos em b) 9) Sim. O plano que passa por P e é paralelo a α corta r em um ponto A, que determina com P a reta pedida 10) Errado. Os planos também podem ser secantes (ou mesmo coincidentes) 12) Não 16) Pode ser um segmento de reta ou um paralelogramo 17) a) um paralelogramo; b) um trapézio; c) um pentágono; d) um hexágono 21) Se α e β são paralelos, o lugar geométrico pedido é o plano paralelo a ambos que fica a igual distância deles; se os planos são secantes, todo ponto do espaço é ponto médio de algum segmento cujos extremos estejam em α e β 24) a) 5 cm por 1,66 cm; b) 5 m 26) $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 8

Perpendicularismo

1) Não 4) Um círculo contido em um plano perpendicular a r. 5) Tetraedro regular, octaedro regular e cubo, respectivamente 8) Certo (α e β são perpendiculares) 9) Sim 15) a) 5,35 m; b) 4,45 m; c) 4,15 m .

Respostas dos Exercícios do Capítulo 9

Medindo Distâncias e Ângulos

3) A reta perpendicular ao plano (ABC) passando pelo circuncentro do triângulo ABC 4) a) os planos bissetores dos dois planos dados b) o plano paralelo e equidistante deles 5) a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 9) a) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ b) $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ 10) $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, $\theta \cong 109^o 28' 16,4''$ 12) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 14) Um quadrado de

lado $a/2$ 16) A esfera de diâmetro AB (exceto os pontos A e B) 17) Sendo A a projeção de P sobre α, o LG é a circunferência de diâmetro AB. Se A = Q, o LG é o ponto Q 18) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, $\frac{a\sqrt{6}}{12}$, $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ 19) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a\sqrt{6}}{6}$, $\frac{a}{2}$ 20) $\frac{\sqrt{6}}{4}+1$ 21) $\frac{a(2\sqrt{3}-3)}{2}$ 22) 15° 23) NY = 10h, Paris = 15h, Atenas = 17h, Bagdá = 18h, Calcutá = 21h.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 10

Poliedros

1) 8 faces triangulares e 4 quadrangulares 2) 36 5) São duas as famílias: uma com $F_3 = 4$ e $F_4 = 2$ e outra com $F_5 = 1$ e $F_3 = 5$ 6) $V' = V + F$, $F' = 2A$, $A' = 3A$. Vale a relação de Euler 8) $\frac{a(2-\sqrt{2}}{2}$ 9) $A = 36$. Observações: a) como o oceano é um "país", o litoral de cada país é, neste problema, uma linha de fronteira b) Não se considerou a fronteira da Colômbia com o Panamá. Tudo o que está fora da América do Sul se chamou oceano c) Como o enunciado afirma que não existe ponto comum a mais de 3 países, estabelecemos um vértice onde o rio Uruguai desemboca no rio da Prata (já oceano) d) Ignoramos a Terra do Fogo pela complicada geografia 10) Não 11) Não. Como as duas ilhas têm número ímpar de pontes , o percurso deve terminar tanto em uma quanto na outra. Contradição. 12) Não. Há 4 vértices de gênero ímpar.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 11

Volumes e Áreas

1) a) 96.000 litros b) 2.780 2) a) 280 b) 276 c) 84 d) 8 3) $\frac{a^3}{3}$ 4) a) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ 5) 8 triangulares (equiláteras) e 6 quadradas b) $\frac{5a^3}{6}$ c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ 6) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ 7) $\frac{V}{6}$ 9) V= $48cm^3$, $S = 96cm^2$, $r = 3/2$, $R = 17/4$ 11) $\frac{128\sqrt{2}\pi}{3} \cong 190cm^2$ 12) $V = 12\pi cm^3$, $S = 24\pi cm^2$, $r = 3/2$, $R = 25/8$ 13) $81\pi cm^3$ 15) 1.350ml 16) $\frac{8V}{27}$, e $\frac{19V}{27}$ 17) 3m 18) diâmetro = altura = $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 19) Não. Os volumes gerados pelos dois triângulos não são iguais. Na verdade, um é o dobro do outro.

Respostas dos Exercícios do Capítulo 12

Superfícies e Sólidos de Revolução

1) $S = 2\sqrt{3}\pi$, $V = \frac{\pi}{2}$ 2) $S = 39\pi^2 cm^2$, $V = \frac{117\pi^2}{4} cm^3$ 3) $\frac{2\pi}{3} \cdot bc\sqrt{b^2 + c^2}$ 4) a) $\left(\frac{43}{9}, \frac{25}{9}\right)$ b) $\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{4}\right)$ 6) 3.200km 7) ABCD é um trapézio com base maior AB e base menor CD. Sejam M e N os pontos médios das bases. Prolongue AB de um comprimento BE igual a CD. Prolongue CD de um comprimento DF igual a AB. A interseção de MN com EF é o centro de gravidade da superfície do trapézio.



COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

- *Logaritmos* - E.L.Lima
- *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios* - A.C.Morgado, J.B.Pitombeira, P.C.P.Carvalho e P.Fernandez
- *Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança)* - E.L.Lima
- *Meu Professor de Matemática e outras Histórias* - E.L.Lima
- *Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios* - E.L.Lima com a colaboração de P.C.P.Carvalho
- *Trigonometria, Números Complexos* - M.P.do Carmo, A.C.Morgado, E.Wagner, Notas Históricas de J.B.Pitombeira
- *Coordenadas no Espaço* - E.L.Lima
- *Progressões e Matemática Financeira* - A.C.Morgado, E.Wagner e S.C.Zani
- *Construções Geométricas* - E.Wagner com a colaboração de J.P.Q.Carneiro
- *Introdução à Geometria Espacial* - P.C.P.Carvalho
- *Geometria Euclidiana Plana* - J.L.M.Barbosa
- *Isometrias* - E.L.Lima
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 1* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 2* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *A Matemática do Ensino Médio Vol. 3* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *Matemática e Ensino* - E.L.Lima
- *Temas e Problemas* - E.L.Lima, P.C.P.Carvalho, E.Wagner e A.C.Morgado
- *Episódios da História Antiga da Matemática* - A.Aaboe
- *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática* - E.L.Lima

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes* - D.G.de Figueiredo
- *Primalidade em Tempo Polinomial - Uma Introdução ao Algoritmo AKS* - S.C.Coutinho

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple* - L.N.de Andrade
- *Elementos de Aritmética* - A. Hefez

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística* - H.Bolfarine e M.Sandoval

COLEÇÃO OLIMPÍADAS

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática*, 9ª a 16ª - C.Moreira, E.Motta, E.Tengan, L.Amâncio, N.Saldanha, P.Rodrigues

Este livro, escrito para professores do Ensino Médio e estudantes de licenciatura em Matemática, cobre os principais assuntos estudados na segunda série do Ensino Médio.

O livro tem duas partes bem distintas. A primeira parte é dedicada à Matemática Discreta, contendo o estudo de Progressões (com aplicações à Matemática Financeira), Análise Combinatória e Probabilidade. Um cuidado sempre presente nessa parte é o de evitar o uso excessivo de fórmulas. Na maioria dos casos, elas são desnecessárias e substituídas, com vantagem, pelo uso consciente das definições e dos princípios fundamentais. Por exemplo, os professores são aconselhados a ensinar os alunos a fazer uso inteligente do princípio da multiplicação em Análise Combinatória, ao invés de recorrer a uma profusão de fórmulas, cujo uso é muitas vezes confuso para o aluno ("Professor, aqui eu uso arranjos ou combinações?").

A segunda parte do livro é dedicada à Geometria Espacial e tem duas preocupações principais. A primeira é oferecer uma boa fundamentação do assunto para o professor, discutindo diversas formas de levar esses fundamentos para os alunos. A segunda é apresentar, em cada tópico, sugestões de atividades em sala de aula que visam tornar o assunto mais interessante para o aluno e facilitar o desenvolvimento de sua visão e intuição espacial. Para tal, sempre que possível, são apresentados exemplos de objetos do mundo real que ilustrem conceitos importantes.



